

Höhere arithmetische K–Theorie

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Mannheim

vorgelegt von
Dan Fulea
aus Hermannstadt, Siebenbürgen

Mannheim, 1998

Dekan:	Professor Dr. Reinhard Männer, Universität Mannheim
Referent:	Professor Dr. Rainer Weissauer, Universität Mannheim
Korreferent:	Professor Dr. Richard Pink, Universität Mannheim

Adresse: Fakultät für Mathematik und Informatik
 A5, D-68131 Mannheim
e-mail: fulea@math.uni-mannheim.de

Datum: **23. November 1998**

Mathematische Subjekt-Klassifikation von 1991:

- 16W30 Coalgebren, Bialgebren, HOPF-Algebren
- 16W55 Super-Strukturen
- 18G30 Simpliziale Objekte in einer Kategorie
- 19D99 Höhere algebraische K-Theorie
- 19E20 K-Theorie in der Geometrie; Verbindungen zu Kohomologietheorien
- 19E99 K-Theorie in der Geometrie
- 19F27 Étale Kohomologie, höhere Regulatoren, ζ - und L -Funktionen
- 19F99 K-Theorie in der Zahlentheorie
- 20L15 Gruppoiden im Zusammenhang mit der Topologie
- 53C55 HERMITE'sche und KÄHLERSche Mannigfaltigkeiten
- 55U15 Ketten-Komplexe
- 57T05 HOPF-Algebren
- 57T25 Homologie und Kohomologie von H-Räumen
- 57T30 Bar- und Kobar-Konstruktionen

Motto:
Das Wildschwein mit silbernem Zahn
nach Ștefan Augustin Doinaș

*Ein Prinz aus Levant, der die Jagd lieb gewann
und rabenschwarz Herz tiefer Wälder betrat,
beging schwer, sehr lang durch die Äste den Pfad
und sprach so erwählt durch den Flötengesang:
- Doch kommet, zu jagen im Kranz dunkler Wälder
das Wildschwein mit silbernem, schaudrigem Zahn,
das täglich im Panzer der Nester sich ändert,
den Gang, und das Fell, und im Auge den Glanz.
- Mein Herr, wagte milde ein junger Begleiter,
da gab's jenes Wildschwein noch nie, nicht ein Bild,
dabei wär's gescheiter, zu wittern das Kleinwild,
der Hase läuft frei, der Rotfuchs schleicht wild...
Der Prinz ging doch heiter mit keimendem Lächeln,
obwohl seine Wacht in der Oase der Farben der Bäume
erwuchs,
berührte das schlafende Reh mit dem Hauch,
gab freies Geleit dem hell glitzernden Luchs.
Den Eichen zu Füßen, beiseite das Unkraut gelegt,
- Doch sehet, ein Traum, wie es Zeichen uns gibt,
das Wildschwein mit silbernen Zähnen, uns nah,
ach, jagen wir's schnell mit dem hölzernen Pfeil,
- Mein Herr, ist doch Wasser als Schaumspiel im Zweig,
versetzte ein junger Begleiter gescheit mit Emphase.
Der Prinz gab sich drehend als Antwort nur: – Schweig!
Und Wasser, sein Spiegel, erglänzte wie Wildschwein, sein
Zahn.
Ulmen zu Gast trieb er weiter sein Heer, sein Leiden geriet
aus den Gleisen:
- Doch sehet, es scharrt und erwartet uns heil,
das Wildschwein mit silbernem Zahn, auf den Weiden,
ach, jagen wir's schnell mit dem Eisen im Pfeil,
- Mein Herr, ist doch Gras als der Schatten des Windes im
Zweig,
versetzte ein junger Begleiter mit Mut.
Der Prinz gab sich drehend als Antwort nur: – Schweig!*

*Und Schatten der Gräser erglänzten wie Wildschwein,
sein Zahn.
Mit Tannengeflüster auf Atem belohnt, erklang ungeheuer
sein Schrei in den Felsen:
- Doch sehet, den Ort, wo es wohnt und es ruht,
das Wildschwein mit silbernem Zahn aus den Versen,
ach, jagen wir's schneller mit Feuer und Pfeil,
- Mein Herr, ist der Mond wie die Linsen des Himmels,
gesiebt durch den Zweig,
versetzte ein junger Begleiter missachtend im Grinsen.
Der Prinz gab sich drehend als Antwort nur: – Schweig!
Und Strahlen des Mondes erglänzten wie Wildschwein,
sein Zahn.
Doch weh! Als sich Himmel mit Abendsternlichtern versah,
und er in dem Dämmer der Quelle kam nah,
erschien fast gigantisch ein Wildschwein, sein Zahn
zog ihn gewaltig auf rotes Gestein.
Welch seltsames Tier überschwemmt mich mit Blut
und zögert die Wildschweinverfolgung hinaus?
Welch trauriger Vogel im Mondschein verweint?
Welch welkendes Blatt welt mein Gang?
- Mein Herr, selbst das Wildschwein mit silbernem Zahn,
es selbst hat dich grunzend gepackt unterm Zweig,
dem Jagdhund gelang es, es weit zu vertreiben...
Der Prinz gab sich drehend als Antwort nur: – Schweig.
Nimm lieber das Waldhorn und blas' gen Zenit
ununterbrochen im Gleichschritt mit meinem Verbleiben,
Der Mond währenddessen erglitt,
Waldhorn erklang, nicht allzu lang.*

Einleitung

Der mathematische Rahmen. Die K-theoretische Pionierarbeit [BMS] fängt damit an, dem Leser die virtuelle Darstellung einer topologischen Welt jenseits der historischen mathematischen Geschichte vorzustellen, Zitat, *“in welcher die topologischen K-Gruppen definiert, jedoch die Kohomologie-Gruppen nicht bekannt sind. Diese ist eine direkte Anspielung auf die Lage der algebraischen Geometrie, wo die algebraischen K-Gruppen einer algebraischen Varietät nach ihrer Einführung in 1973 durch Quillen bekannt sind, wo jedoch eine naheliegende Kohomologietheorie fehlt. Potenzielle Schwierigkeiten des Lebens in dieser Welt wären:*

1. *Diese Welt kennt keine expliziten Kozyklen, welche Kohomologie-Klassen repräsentieren. Diese Kozyklen sind oft interessante geometrische Objekte wie z.B. Differentialformen oder Čech-Kozyklen, welche die Kohomologie in Verbindung mit anderen mathematischen Ideen bringen.*
2. *Die ganzen Kohomologie-Gruppen sind nicht definiert.*
3. *Die mächtigen Rechentechniken der Kohomologietheorie sind nicht vorhanden.”*

Zitat(–Übersetzung) Ende. An einer weiteren Stelle ([BMS], S. 680, Punkt 4.) kommt für die bzgl. der γ -Filtration gebildeten graduierten K-theoretischen Gruppen der Kommentar:

“Die Gruppen links von der MILNOR-Spalte sind geheimnisvoller: Es ist sogar schwierig, Invarianten oder höhere Regulatoren zu finden, welche darauf nicht verschwinden.”

Der Meilenstein ist bereits 1984 durch die Arbeit von BEILINSON [Be] gesetzt. Hier wird insbesondere die \mathcal{D} (DELIGNE)-Kohomologie eingeführt, ihre Eigenschaften werden untersucht, und gestellt werden (die DELIGNE-BEILINSON-)Vermutungen, welche das Zusammenspiel zwischen

- der QUILLEN-K-Theorie (–genauer– der nach BEILINSON davon abgeleiteten absoluten Kohomologie)
- und der DELIGNE-Kohomologie

in Verbindung zu Werten von L-Funktionen bringen.

Die Arbeitsgemeinschaft in Oberwolfach von 6–12 April 1986 übernimmt diese Thematik und setzt sich als Ziel, die Arbeiten von BEILINSON und BLOCH zu vertiefen. So entstand 1987 der Band [RSS], 1988 publiziert, welcher den Stand der Dinge zum damaligen Zeitpunkt gut trifft. In den weiteren (zehn) Jahren entsprangen diesem Ideenkreis neue Richtungen und Entwicklungen, welche vielleicht am besten dem titanischen Band [JKS] zu entnehmen sind, welcher als Frucht der “motivischen” Konferenz an der Washington-Universität, Seattle, zwischen 20.07 und 02.08.1991 entstand.

Wir widmen nun unsere Aufmerksamkeit einer parallelen, teilweise disjunkten Richtung in der algebraischen Geometrie, der ARAKELOV-Geometrie, welche 1974 durch die Arbeiten [Ar1] und [Ar2] eingeleitet wurde. Sie ist eine Verbindung zwischen der algebraischen Geometrie von algebraischen Kurven/Flächen und der Differentialgeometrie der naheliegend zugeordneten Objekte. Der Erfolg der ARAKELOV-Geometrie besteht in ihrem Hauptingredient, einem **Schnittprodukt**, welches es ermöglicht, die Zahlentheorie in Verbindung zur algebraischen Geometrie zu bringen. Die MORDELL-Vermutung und die Höhenpaarung für elliptische Kurven können z.B. mit ARAKELOV-theoretischen Methoden untersucht werden. In der Entwicklung der ARAKELOV-Geometrie sind nach Kenntnis und Sichtweise des Autors folgende Punkte aufzuzählen:

- Die Arbeiten von ARAKELOV.
- Die Arbeit von FALTINGS in Bezug auf die MORDELL-Vermutung, insbesondere zu erwähnen: [Fa2].
- Die Monographie von LANG: [La].
- Die zahlreichen Arbeiten von GILLET und SOULÉ in den 90er Jahren –die Monographie [ABKS] beschreibt partiell diese Sicht der Dinge–
- und die parallele Arbeit von FALTINGS [Fa], welche seine Vorlesung in Princeton, 1990 datiert, in Buch-format bringt.

In dieser Arbeit werden wir eine mathematische Struktur untersuchen, welche an dem Treffpunkt dieser zwei historisch kurz geschilderten Richtungen entsteht.

Der Autor hat direkte Berührungen mit der ARAKELOV–Geometrie erst Anfang 1993. Insbesondere ist dabei die Bonner Tagung über arithmetische Schnitt–Theorie das Datum, wo er die für diese Dissertation wichtigen Arbeiten von WANG [Wa] und insbesondere von BURGOS [Bu] kennenlernt. Einen späten Dank möchte ich nach fünf Jahren an Professor CHRISTOPH SOULÉ und an JOSÉ IGNATIO BURGOS richten, für die damaligen sehr kurzen, für mich jedoch sehr bedeutenden Diskussionen, wo die Kontur und Forschungsrichtung des zweiten Teiles, Regulatoren, dieser Arbeit festgelegt wurde.

Im Zeitraum 20.04.1993–17.02.1994 hat mein Doktorvater, Professor RAINER WEISSAUER, an der Mannheimer Fakultät für Mathematik und Informatik eine Vorlesung über arithmetische Schnitt–Theorie gehalten, und darüber hinaus entstand parallel in Schriftform die Arbeit [W], welche eine außergewöhnliche Leistung darstellte, für die Schnelligkeit, mit welcher sie entstand, für das Volumen von Information, welches sie zielgerichtet komprimiert (– dabei zu erwähnen: [Fa],[BGV] und einzelne Arbeiten von BISMUT, GILLET und SOULÉ –), und für den Weitblick, welchen die offen gelassenen Fragen herausfordern. Für dieses und für die danach folgenden vielen anregenden Diskussionen finde ich hier den treffenden Platz, dafür meinem Doktorvater meinen Dank auszusprechen.

Leitfaden für diese Arbeit. Der Ausgangspunkt für diese Arbeit war die Suche nach einer Konstruktion einer geeigneten **höheren arithmetischen Schnitt–Theorie**. Das Problem kann wie folgt formuliert werden:

Sei X eine glatte algebraische (oder komplexe) Mannigfaltigkeit. Wir suchen einen Morphismus von Komplexen ch der Form:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{“Algebraischer” Komplex} \\ \text{von “Zykeln” auf } X \\ \text{mit einem Produkt } \otimes \end{array}} \xrightarrow{ch} \boxed{\begin{array}{c} \text{“Differentialgeometrischer” Komplex} \\ \text{von Differentialformen auf } X \\ \text{mit dem Produkt } \wedge \end{array}},$$

welcher verträglich mit den Produktstrukturen \otimes und \wedge ist. Diese Arbeit verwirklicht eine solche Konstruktion in den folgenden Schritten:

A. Der Definitionsbereich der Abbildung ch .

Dieser Komplex steht im direkten Zusammenhang mit der höheren algebraischen K–Theorie, und seine Einführung und Studium finden im ersten Teil der Arbeit statt:

- Im Kapitel 1 wiederholen wir den Formalismus der simplizialen Mengen, in Rahmen dessen des weiteren die K–theoretischen Konstruktionen von WALDHAUSEN und GILLET, GRAYSON präsentiert werden. Die K–Theorie ist die Homotopie der Räume/Spektren, welche durch diese Konstruktionen entstehen und eine natürliche H–Raum–Struktur tragen. Wir konzentrieren uns durch “Linearisierung” auf die Homologie und der Koprodukt–Struktur dieser Räume, was einem Studium der Homotopie modulo Torsion gleichkommt. Wir untersuchen explizit kanonische Komplexe, welche diese Homologie berechnen. (Im Licht der DELIGNE–BEILINSON–Vermutungen ist z.B. dieses Studium sehr interessant.)

Man kann diese “Linearisierung” als kategorielle Bar–Konstruktion ansehen.

- Um eine Produkt–Struktur einzuführen, ist es vorteilhaft, mit einer kubischen Version der Objekte aus dem Kapitel 1 zu arbeiten. Als Parallele führen wir im Kapitel 2 Analoga der Objekte aus dem ersten Kapitel, und der Vergleich zwischen simplizialen und kubischen Konstruktionen erfolgt im Kapitel 3.

Wir schreiben bei diesem Vergleich Abbildungen zwischen Räumen in nur eine Richtung – von simplizial nach kubisch –, zeigen aber, daß nach dem Homologie–Übergang Isomorphismen induziert werden, welche mit dem Koprodukt verträglich sind.

- Die kubische Version ist auch vorteilhaft, um explizit Homotopie– und Homologie–Elemente anzugeben, wie es ein paar Beispiele aus dem Kapitel 5 illustrieren.
- Im Kapitel 4 wird ein struktureller Rahmen der Konstruktionen aus dem ersten Teil der Arbeit gesucht, ohne ein finales Stadium zu erreichen. Man kann folgende Fragen stellen:
 1. In wie weit können die “Bar–Konstruktionen” nach geeigneter Graduierung als HOPF–Algebren von \mathbb{Z} –Moduln organisiert werden?
 2. In wie weit kann homologische Algebra für HOPF–Algebren betrieben werden?

Zur ersten Frage erwähnen wir die Möglichkeit, die Bar–Konstruktion mit einer Bialgebra–Struktur zu versehen, und diese für einen (einfachen) Quotient–Anteil zu einer HOPF–Algebra zu erweitern.

Zur zweiten Frage wird die Kategorie der HOPF–Algebra–Objekte in einer Tensor–Kategorie als triangulierte Kategorie dargestellt.

B. Der Wertebereich der Abbildung ch .

Dieser ist eng mit Komplexen verwandt, welche die reelle DELIGNE– oder die DE RHAM–Kohomologie berechnen. Wir gehen im Kapitel 6 von solchen Komplexen aus, welche von BURGOS näher untersucht wurden, und wiederholen den zugehörigen homologischen Formalismus. Für die weitere Konstruktion der Abbildung ch sind folgende Punkte lebenswichtig:

- Eine Änderung der Komplexe von BURGOS, welche formaler, algebraischer Natur ist, so daß grob *a posteriori* (und **nicht** *a priori*) Invarianten bzgl. der komplexen Konjugation gebildet werden.

Die neue Version kann einfach im Formalismus von BURGOS untersucht werden. Insbesondere erbt sie eine kanonische Multiplikation. Das Produkt bzgl. dieser Multiplikation zweier Elemente von vielen Typen einer Bigraduierung verschwindet, so daß man bzgl. dieses Produkts multiplikative Abbildungen betrachten kann, welche für viele Typen verschwinden. Aus diesem Grund ist der folgende Punkt wichtig.

- Eine entscheidende Änderung obiger Multiplikation, welche einen kleineren Kern hat. Wir führen am Ende des Kapitels **8** die Komplexe **C** und **D** ein. Diese besitzen eigenartige Produkte, welche im wesentlichen die doppelte Filtration im DOLBEAULT-Komplex ausnutzen. Es existiert zusätzlich eine kanonische multiplikative Abbildung

$$L : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C} .$$

Der Komplex **D** ist mit der Berechnung der reellen DELIGNE-Kohomologie verbunden, und der Komplex **C** mit der Berechnung der komplexen DE RHAM-Kohomologie.

C. Die Konstruktion der Abbildung ch .

Diese Konstruktion ist im Kapitel **7** des zweiten Teils dargestellt. Wir gehen von einer Formel von FALTINGS [Fa] für den CHERN-Charakter in der arithmetischen Schnitttheorie aus und erweitern diese auch für Elemente einer metrisierten kubischen Bar-Konstruktion, welche in höheren Graden leben. Als Ingredient der Konstruktion brauchen wir den superalgebraischen Formalismus, den wir im Kapitel **5** kurz wiederholen.

Unser CHERN-Charakter kann parallel mit Werten in den Komplexen **D** und **C** geschrieben werden, und die multiplikative Abbildung L realisiert den Übergang.

Es stellt sich die Frage, ob dieser zur Komplex-Ebene geschriebene CHERN-Charakter in Homologie den K-theoretischen CHERN-Charakter induziert. Wir beantworten diese Frage in dieser Arbeit nicht. K-theoretische Standard-Techniken, wie z.B. im fünften Abschnitt der Arbeit [BW] dargestellt, können dafür angewandt werden. Der Autor wird eventuell diesen Aspekt in einer weiteren Arbeit in einem allgemeineren Rahmen ansprechen.

Im Kapitel **9** wird versucht, den CHERN-Charakter in dem Anteil näher zu erklären, der zur Regulator-Abbildung $K_{2p-1}(X) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^1(X, \mathbb{R}(p))$ entspricht.

Vergleich mit den Resultaten aus [BW]. Vor kurzem erschien die Arbeit [BW], welche den gleichen philosophischen Rahmen wie diese Arbeit einnimmt und erfolgreich eine parallele geometrischere Konstruktion von CHERN-Charakteren vollzieht. Zusätzlich wird dort sorgfältig gezeigt, daß die konstruierten CHERN-Charaktere die K-theoretischen Regulatoren sind. Diese Parallele ist deutlich in der Tabelle/Abbildung 1 zu sehen:

Was ist neu in dieser Arbeit?! Wir arbeiten mit zwei Sorten von kubischen Mengen:

- streng kubische (oder auch \perp -kubische) Mengen, (– diese Objekte sind in der Literatur als kubische Mengen bezeichnet–)
- und vollkubische (oder einfach auch: kubische) Mengen. (Diese sind nicht die in der Literatur als kubische Mengen bezeichneten Objekte, sondern sie stellen eine neuartige Begriffsbildung dar.) Eine vollkubische Menge kodiert eine reichere Struktur als die Struktur einer streng kubischen Menge, und es gibt einen Vergiß-Funktor, welcher vollkubische Mengen auf streng kubische Mengen abbildet.

Es gibt im funktoriellen Sinne geometrische Realisierungen simplizieller bzw. kubischer Mengen, welche topologische Räume sind:

- Eine simpliziale Menge hat eine simpliziale geometrische Realisierung.
- Eine streng kubische Menge hat eine streng kubische geometrische Realisierung.
- Eine vollkubische Menge hat eine vollkubische geometrische Realisierung.

Jede dieser geometrischen Realisierungen ist ein Quotient eines topologischen Raumes, welcher als disjunkte Vereinigung “ n -dimensionaler Tetraeder” bzw. “ n -dimensionaler Würfel” entsteht.

Die Bildung des Quotienten erfolgt nach Identifikation von Punkten, welche zu simplizialen bzw. (streng/voll-)kubischen Ausartungen entsprechen. Man identifiziert dabei Punkte, welche sich durch gewisse Einbettungen entsprechen:

- Im Falle der simplizialen geometrischen Realisierung werden alle Einbettungen berücksichtigt, welche ein n -dimensionales Tetraeder als Seite eines m -dimensionalen Tetraeders darstellen. ($m > n$.)
- Im Falle der streng kubischen geometrischen Realisierung werden alle Einbettungen berücksichtigt, welche ein n -dimensionaler Würfel als Seite am Rande eines m -dimensionalen Würfels darstellen. ($m > n$.) Diese sind eine Verknüpfung von Morphismen der Form:

$$[0, 1]^{n-1} \rightarrow [0, 1]^n, (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_k, a, x_{k+1}, \dots, x_n), \text{ wobei } a \in \{0, 1\} .$$

Die Arbeit [BW]	Diese Arbeit
Der Wertebereich	
Der Komplex aus der ursprünglichen Arbeit von BURGOS [Bu] ist nicht geeignet, um eine weitere Verträglichkeit des CHERN-Charakters zu erzielen. Es wird als Substitut der THOM-WHITNEY-Komplex benutzt, welcher von NAVARRO AZNAR eingeführt wurde. Grob werden darin Paare von Elementen aus dem BURGOS-Komplex benutzt, welche zusätzlich mit einer formalen Homotopie versehen sind.	Die Komplexe D und C , welche eine algebraische Variation des Komplexes von BURGOS [Bu] darstellen. Dabei wird das Differential durch die doppelte Filtration des DOLBEAULT-Komplexes getwistet. Die Produktstruktur ist neuartig.
Der Definitionsbereich	
Beide Arbeiten benutzen die Idee, welche bereits in der Arbeit von WANG [Wa] vorhanden ist, die K-Theorie mittels der WALDHAUSEN-Konstruktion zu erklären. Der Regulator/CHERN-Charakter faktorisiert über die HUREWICZ-Abbildung aus der K-Theorie in die topologische Homologie der WALDHAUSEN-Konstruktion. Diese läßt durch die DOLD-PUPPE-Konstruktion in der algebraischen Topologie auf das Studium der Simplizes reduzieren, in unserem Fall sind diese WALDHAUSEN-Diagramme. In [Wa] wird induktiv, zum Teil nicht explizit eine Umformung von WALDHAUSEN-Diagramme in kubische Diagramme präsentiert. Solche kubischen Diagramme werden später durch eine Hinzunahme von Metriken angereichert.	
Im vierten Abschnitt wird diese Konstruktion durchgeführt und in Verbindung mit der K-Theorie gebracht	Der erste Teil der Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit dieser Konstruktion. Für die WALDHAUSEN- und die GILLET-GRAYSON-Konstruktion werden topologisch kubische Analoga eingeführt. Die Homologie der Räume ist näher untersucht. Insbesondere werden explizite einfache Elemente in der K-Theorie konstruiert.
Die Bildung von ch	
Gleicher differentialgeometrischer Ansatz für K_0 .	
geschickte geometrische Quotientbildung eines Komplexes auf $X \times (P^1)^{\times n}$, welche mittels der formal alternierten Pull-Back-Abbildungen zu den n Inklusionen von 0 und ∞ in je einem Faktor P^1 von $(P^1)^{\times n}$ entstehen.	das regularisierte Integral auf $\mathbb{R}_{>0}^n$ nach [Fa]
geometrische Deformationstechnik mit Parameter aus $(P^1)^n$	operatorenthoretische Deformationstechnik mit Parameter aus $\mathbb{R}_{>0}^n$
ch ist multiplikativ	ch ist multiplikativ

ABBILDUNG 1. Vergleich dieser Arbeit mit der Arbeit [BW]

- Im Falle der (voll)kubischen geometrischen Realisierung werden alle obigen Einbettungen berücksichtigt, aber auch "diagonale" Einbettungen. Jede solche Einbettung läßt sich als Verkettung von Morphismen obiger Form oder der Form:

$$[0, 1]^{n-1} \rightarrow [0, 1]^n, (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_k, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) .$$

Parallel zur simplizialen G-Konstruktion von GILLET und GRAYSON führen wir die kubischen KG^\perp - und KG -Konstruktionen. Diese sind neu.

Wir stellen dann Beziehungen/Übersetzungen zwischen der G-Konstruktion und der KG^\perp - bzw. der KG -Konstruktion. Diese Beziehung existiert zu drei Ebenen:

- **mengentheoretisch:** Diese Beziehung entspricht zur Übersetzung eines WALDHAUSEN-Diagramms in einen exakten Multikomplex. Diese Übersetzung erscheint (für einfache Diagramme, nicht für Paare von Diagrammen) in einer nicht expliziten, induktiv definierten Form in der Dissertation von WANG [Wa].
- **topologisch:** Wir schreiben natürliche Abbildungen zwischen topologischen Räumen:
 - ★ von der geometrischen Realisierung der G-Konstruktion in die geometrische Realisierung der KG^\perp -Konstruktion. Diese topologische Übersetzung benutzt die obige mengentheoretische Übersetzung. Ein n -dimensionales Tetraeder in der geometrischen Realisierung der G-Konstruktion wird auf einen n -dimensionalen Würfel in der geometrischen Realisierung der KG^\perp -Konstruktion **nicht affin** abgebildet. Dies erfolgt durch eine Abbildung, welche CARTAN zuzuschreiben ist.

★ von der geometrischen Realisierung der G-Konstruktion in die geometrische Realisierung der KG-Konstruktion. Diese topologische Übersetzung benutzt auch die obige mengentheoretische Übersetzung. Ein n -dimensionales Tetraeder in der geometrischen Realisierung der G-Konstruktion wird auf einen n -dimensionalen Würfel in der geometrischen Realisierung der KG-Konstruktion **affin** abgebildet, so daß die Ecken des Tetraeders auf (kanonisch gewählte) Ecken des Würfels gehen. (Ab diesem Punkt werden wir nur noch am Rande vollkubische Mengen im Laufe der Arbeit betrachten.)

Diese zwei Übersetzungen sind in ihrer Natur verschieden.

• **algebraisch:** Der Funktor $H.(-, \mathbb{Z})$ bildet Abbildungen in der Kategorie der topologischen Räume in Abbildungen von ABELschen Gruppen ab. Es ist ein wichtiges Resultat dieser Arbeit die Tatsache, daß $H.(-, \mathbb{Z})$ die erste obige topologische Übersetzung in einen Isomorphismus von ABELschen Gruppen umwandelt. Dieser Isomorphismus ist verträglich mit der Primitivität von Zykeln.

Dies hat direkte K-theoretische Konsequenzen. Im Kapitel 5 schreiben wir z.B. "müheles" durch diesen neuen Zugang explizite K-theoretische Elemente.

Die Transgressions-Formeln aus dem zweiten Teil der Arbeit sind in Dimensionen größer als 2 neu. (Sie verallgemeinern die Bildung der sekundären BOTT-CHERN-Form/Klasse.)

Wir führen eine neuartige Produktstruktur in einem Komplex ein, der die reelle DELIGNE-Kohomologie einer glatten algebraischen Varietät berechnet. Diese Produktstruktur ist verträglich mit der Produktstruktur im DOLBEAULT-Komplex, welcher die DE RHAM-Kohomologie berechnet, verbindet man diese Komplexe mit einer geeigneten Kompolex-Abbildung L .

Die Transgressions-Formeln erlauben CHERN-Charakter-Formen zu schreiben, welche Werte in den obigen DELIGNE- bzw. DE RHAM-Kohomologie berechnenden Komplexen haben.

Diese CHERN-Charaktere/Regulatoren sind verträglich mit dem \otimes -Produkt von (metrisierten) exakten Multikomplexen und mit dem eingeführten Produkt. (Das Fehlen eines solchen CHERN-Charakters war ein Hindernis in der Entwicklung einer höher dimensional ARAKELOV-Schnitt-Theorie.)

Die letzten zwei Kapitel der Arbeit versuchen diese explizite Form eines Regulators für K-theoretische Zwecke zu benutzen. (Die Resultate in dieser Richtung sind bescheiden. Dies liegt daran, daß man die CHERN-Charaktere auf "primitive" metrisierte Multikomplexe anwenden sollte, um K-theoretische Auskunft zu bekommen.)

Die superalgebraisch homologischen Methoden, welche im zweiten Teil der Arbeit benutzt wurden, sind zum Teil, zumindest in ihrer Technik neu.

Einzelne Randbemerkungen und potenzielle Erweiterungen der Methoden. Die folgenden Punkte werden in dieser Arbeit **nicht** behandelt, stellen jedoch eine starke Quelle und Motivation für die qualitativen Untersuchungen und Richtungen der Resultate.

1. Wir arbeiten ausschließlich mit glatten algebraischen projektiven Varietäten. Die Formel des CHERN-Charakters könnte jedoch *mot-à-mot* übertragen werden, arbeitet man mit exakten Multikomplexen von metrisierten Bündeln über einer (glatten) Varietät X , welche in einer geeigneten Kompaktifizierung \overline{CX} lebt, so daß $Y := \overline{CX} \setminus X$ ein Divisor mit normalen Schnitten in \overline{CX} ist. In diesem Fall sollten jedoch nicht beliebige Metriken verwendet werden, sondern "log-Metriken" mit einem kontrollierten Wachstum um Y . Auch müßten analoge log-Bedingungen für die Differentiale der involvierten Multikomplexe von Vektorbündeln eingeführt oder ein genaueres Studium der Konvergenzprobleme eingeleitet werden.
2. Die Formel des CHERN-Charakters hat auch eine direkte Übertragung mit Werten in der kristallinen Kohomologie. Dabei steht das Wörterbuch aus der Tabelle 2 zur Verfügung.
Eine log-Variante ist auch im kristallinen Formalismus möglich.
3. Wir geben in dieser Arbeit auch Beispiele von K-theoretischen Elementen. Ein systematisches Studium dieser Elemente würden den Rahmen dieser Arbeit überschreiten. Wir bemerken jedoch die mögliche Anwendung dieser Konstruktion für den unangefochtenen Teil der DELIGNE-BEILINSON-Vermutung, welcher die Surjektivität der Regulatorabbildung zwischen einem geeigneten K-Theorie-Anteil und der entsprechenden DELIGNE-Kohomologie: Für dieses Ziel sollten im Vorfeld zwei Aspekte geklärt werden: Konstruktion von genügend vielen Elementen aus der K-Theorie und die explizite Berechnung der Regulatorabbildung auf diesen Elementen. Im zweiten Abschnitt des Kapitels 5 geben wir eine Konstruktion von symmetrischen Würfeln, welche nur in **ungeraden** Graden Zykeln induzieren können. Eine erste Frage betrifft die Aussonderung von primitiven Zykeln, welche K-theoretischen Elementen entsprechen. Diese Primitivität ist direkt in der Dimension 3, in höheren Dimensionen ist ein rekursives Studium spekulativ denkbar. Eine zweite Frage betrifft die Aussonderung unter den primitiven Zykeln von solchen Zykeln, die zum interessanteren Anteil bzgl. der K-theoretischen γ -Filtration entsprechen. Der Autor wird diese Aspekte in einer virtuellen Arbeit untersuchen. Zur Unterstützung dieses Studiums ist folgender Punkt interessant und hilfreich:

Der Wertebereich	
Der Komplex von BURGOS oder	Der Komplex, welcher die synthomische Kohomologie berechnet, wie z.B. in [Ts] dargestellt, oder
die geeigneten Variationen auf diesem Thema, die Komplexe D und C	die geeigneten parallelen Variationen auf diesem Thema, welche <i>mot-à-mot</i> in Anwesenheit von dividierten Potenzen übertragbar sind
Der Definitionsbereich	
Freie abelsche Gruppe mit folgenden Erzeugenden: Metrisierte Multikomplexe von Vektorbündeln. Die Metrik induziert zwei wesentliche Objekte: einen metrischen und eine Paarung für die Menge \mathcal{E} der \mathcal{C}^∞ -Schnitte des Bündels E . Wir können natürlich keine solche Paarung über \mathbb{Q} oder einem Definitionskörper der Gleichungen der Basisverietät X , sie existiert jedoch nach Tensorprodukt mit \mathbb{C} , wodurch alle "Perioden" mittensoriert werden.	Freie abelsche Gruppe mit folgenden Erzeugenden: Multikomplexe E von (geeignet gefilterten) Vektorbündeln, versehen mit Zusammenhängen (mit geeigneter GRIFFITH-Transversalität). Kristalle. Zusätzlich ist eine Dualität $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}_{cris}$ für Schnitte von E nach der Aufnahme von "Perioden" eines geeigneten Körpers \mathbb{C}_{cris} als Teil der Struktur festzulegen.
Die Bildung von ch	
komplexe Exponential-Abbildung	durch dividierte Potenzen gebildete Exponential-Abbildung
Superspur	Superspur
Bildung des adjungierten Opeartors \mathbf{v}^* zu \mathbf{v}	Bildung des dualen Operators
das Regularisierte Integral von 0 bis ∞	Bildung der Spur bzgl. des verschwindenden (evaneszenten) Zyklus $\{0\} - \{\infty\}$

ABBILDUNG 2. Wörterbuch: komplex-kristallin

- Wir führen einen topologischen Raum $||\mathbb{K}\mathbb{G}^\perp\mathcal{C}||$ zu einer exakten Kategorie \mathcal{C} , der einen direkten Bezug zur K-Theorie hat. Die Homologie dieses Raumes wird von einem Komplex "kubischer Natur" $\mathbb{Z}[\mathbb{K}\mathbb{G}^\perp\mathcal{C}]$ berechnet, welcher über \mathbb{Z} lebt. Wir tensorieren nun mit $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und stellen die Frage, ob ein Formalismus von STEENROD-Operationen zur Komplex-Ebene eingeführt werden kann. Der kubische Formalismus ist für diese Frage geeigneter als der simplizielle Formalismus.
- Wir benutzen in dieser Arbeit zwei Sorten von kubischen Mengen. Die \perp -kubischen Mengen sind die in der Literatur (z.B. [BH1], [BH2], [To]) standardmäßig als "kubisch" bezeichneten Mengen. Wir führen auch sogenannte "vollkubische" Mengen aus zwei Gründen ein:
 - ★ Diese kodieren mehrere Ausartungen als die \perp -kubischen Mengen. Insbesondere entstehen parallel zur Relation $\partial\partial = 0$ auch Relationen der Form $\partial\delta = 0$, wobei δ eine formale lineare Kombination von Ausartungen zu Seiteneinbettungen der Kodimension größer als 1 ist.
 - ★ Wir werden die Transgressions-Formeln (118), (119), (120) für einen exakten Multikomplex E von komplexen Vektorbündeln nach dem Deformationsparameter $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}_{>0}^{n+1}$ auf $(0, \infty)^{n+1}$ integrieren, um einen CHERN-Charakter für E zu konstruieren, dessen Verhalten bzgl. der \perp -kubischen Ausartungen einfach zu beschreiben ist. Es ist jedoch auch interessant, auf Gebieten der Form $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \infty$ zu integrieren, wodurch vollkubische Ausartungen von E natürlich auftreten.

Danksagung.

Es wäre fast unmöglich eine Arbeit von diesem Umfang zu vollziehen, wäre der Autor nicht im Genuß einer kontinuierlichen Unterstützung, eines engen Vertrauens und eines forschungsfreundlichen Klimas von Seiten aller Menschen, mit welchen er während den Vorbereitungen dieser Dissertation direkten Kontakt hatte.

Vom ganzen Herzen geht mein Dank

für die mathematische Unterstützung

an die Organisatoren und Teilnehmer der niveauvollen Arbeitsgemeinschaften in Oberwolfach,

an die traditionelle Arbeitsgemeinschaft Mannheim-Heidelberg,

und an die fleißigen Teilnehmer an Seminaren im engsten Kreis einer kleinen Fakultät, insbesondere an Joachim Ballmann, Prof. Siegfried Böcherer, Eduard Depner, Bernhard Heim, Prof. Richard Pink, Bernhard Runge, Michael Schröder, Prof. Rainer Weissauer,

und für die tägliche, verständnisvolle Unterstützung, ohne welche diese Arbeit weder angefangen, noch nachvollzogen werden konnte,

an Frau Edeltraud Trapp für ihren guten, allgegenwärtigen Rat,

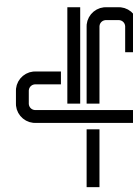
an Wolfgang K. Seiler und Martin Schlichenmaier (auch) für ihre Hilfe in der Behebung aller harten Software-Probleme eines launischen Servers unwürdig des Namens `euklid`, und

an Prof. Hans-Jochen Bartels, Prof. Siegfried Böcherer, Prof. Ulrich Brüning (Informatik), Prof. Herbert Popp und insbesondere an Prof. Rainer Weissauer, welche es mir möglich machten, im universitären Rahmen lückenlos tätig zu sein und im Didaktischen und Forschenden einen rein mathematischen Beruf auszuüben.

Ein besonderer Dank geht an `anca`, welche während des ganzen Promotionsvorhabens an meiner Seite die Höhen und Tiefen, die kurzen und langen Nächte und die vielen Zu-Wenige-Tage feinfühlig absolviert hat.

Mannheim, den 23.11.1998,

dan fulea



Inhaltsverzeichnis

	iii
Einleitung	v
Teil 1. Kategorieller Formalismus	1
Kapitel 1. Simplizieller Formalismus	3
1. Simpliziale Mengen	3
2. Die S.–Konstruktion von WALDHAUSEN	8
3. Die G.–Konstruktion von GILLET und GRAYSON	11
4. Die Bar–Konstruktion	15
5. Die K–Theorie	17
Kapitel 2. Kubischer Formalismus	19
1. Kubische Mengen	19
2. Die KS.–Konstruktion, die KS^\perp –Konstruktion und die richtige Linearisierung $\mathbb{Z}K.(\cdot)$	25
3. Die KG.–Konstruktion	31
4. Die Koprodukt–Struktur auf kubischen Mengen	32
5. Die kubische Bar–Konstruktion KB	34
6. Anpassungen für die Einführung einer \cdot –Struktur auf der KG^\perp –Konstruktion	35
Kapitel 3. Übersetzungen simplizial–kubisch	37
1. Mengentheoretische Übersetzungen $G_n\mathcal{C} \rightarrow KG_n\mathcal{C}$	37
2. Topologische Übersetzungen zwischen geometrischen Realisierungen	38
3. Algebraische Übersetzungen zwischen Komplexen $\mathbb{Z}.\mathcal{GC}] \rightarrow \mathbb{Z}.\mathcal{KG}^\perp\mathcal{C}]^{na}$	43
4. Zusammenfassung	47
Kapitel 4. Geometrische und absolute Kohomologie–Theorien	49
1. Geometrische und absolute Kohomologie–Theorien	49
2. Triangulierte Kategorien	50
3. Die Homotopie–Kategorie als triangulierte Kategorie	55
4. HOPF–Algebra–Objekte	60
5. Der Funktor $\mathbb{Z}K.(\mathcal{P}_-)$ im Rahmen von geometrischen und absoluten Kohomologie–Theorien	68
Kapitel 5. Symbole	75
1. Konstruktion von Elementen aus $\pi. KG^\perp\mathcal{C} ^\perp$	75
2. Symmetrische Symbole	76
3. Primitivität	79
Teil 2. Regulatoren	81
Kapitel 6. Superalgebra	83
1. Superlineare Algebra	83
2. Allgemeiner Grundring	85
3. Differentialgeometrische Superobjekte	86
4. Metrisierte Multikomplexe von holomorphen Bündeln	88
Kapitel 7. Regulatoren	91
1. Höhere CHERN Charaktere. Klassische Sichtweise	91
2. Höhere CHERN Charaktere. Alternative Sichtweise	91

3. Die höheren CHERN-Formen	92
Kapitel 8. Multiplikative Strukturen und die Deligne-Kohomologie	95
1. Der trunkierte DOLBEAULT-Komplex	95
2. Das Oktogon-Diagramm	96
3. Die Resultate von BURGOS	97
4. Pseudokomplexe	98
5. Die Multiplikation auf dem einfachen Komplex einer Abbildung	101
6. Eine Variante des Deligne-Komplexes. Motivation	104
7. Die explizite Struktur des Komplexes $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^*(A, p)$	105
8. Die Übertragung der multiplikativen Struktur	109
9. Der Shift-Operator	110
10. Die komplexe Konjugation	111
11. Die sh -Filtration	111
Kapitel 9. Der Chern-Charakter	113
1. Die Transgressionsformeln	113
2. Beweis für die DOLBEAULT-Transgression	117
3. Beweis für die erste Deligne-Transgression	117
4. Beweis für die zweite Deligne-Transgression	118
5. Der Differentialring Ξ und die K-theoretische Anwendung der Transgressionsformeln	122
6. Das regularisierte Integral	124
7. CHERN-Formen mit Werten im DOLBEAULT-Komplex	125
8. CHERN-Charakterformen mit Werten in dem trunkierten DOLBEAULT-Komplex	127
Kapitel 10. Höhere Chern-Charaktere	137
1. Superlineare Algebra	137
2. Nullte CHERN-Formen	139
3. Transgression der CHERN-Formen	139
4. Höhere CHERN-Formen	141
Kapitel 11. Werte des Chern-Charakters	143
1. Aufgabenstellung	143
2. Explizite Berechnungen	143
Literaturverzeichnis	149

Teil 1

Kategorieller Formalismus

Simplizieller Formalismus

1. Simpliziale Mengen

DEFINITION 1.1. Sei $\underline{\Delta}$ die Kategorie mit den Objekten \underline{n} für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, wobei

$$\underline{n} := \{0 < 1 < \dots < n\},$$

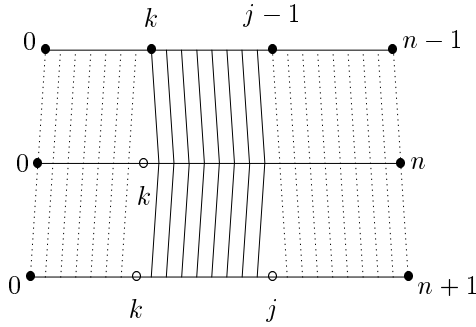
und $\{0 < 1 < \dots < n\}$ die Menge $\{0, 1, \dots, n\}$ ist, die zusätzlich mit der totalen Ordnung $0 < 1 < \dots < n$ als Teil der Struktur versehen wird. Die Morphismen in $\underline{\Delta}$ sind monotone Abbildungen. Eine monotone Abbildung $f : \underline{n} \rightarrow \underline{m}$ ist eine mengentheoretische Abbildung zwischen den Mengen $\{0, 1, \dots, n\}$ und $\{0, 1, \dots, m\}$ mit der Eigenschaft, daß $i < j$ für $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ dann $f(i) < f(j)$ impliziert.

Ein **simplizielles Objekt** (oder ein **simpliziales Objekt**) in einer Kategorie \mathcal{C} ist ein kontravarianter Funktor von $\underline{\Delta}$ nach \mathcal{C} . Diese Objekte bilden eine Kategorie **SimpC** mit natürlichen Transformationen als Homomorphismen.

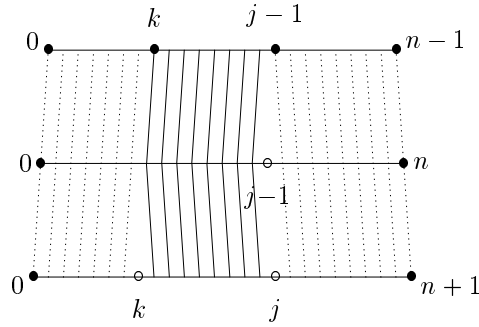
Simpliziale Objekte in der Kategorie der Mengen **Ens**, der abelschen Gruppen **Ab**, etc. werden als simpliziale Mengen, simpliziale abelsche Gruppen, etc. angesprochen und die entsprechenden Kategorien durch **SimpEns**, **SimpAb**, etc. bezeichnet.

• Alle injektiven Abbildungen $\underline{n-1} \rightarrow \underline{n}$ in $\underline{\Delta}$ sind $\epsilon^j = \epsilon_n^j$ für $j = 0, 1, \dots, n$, wobei ϵ^j injektiv ist und im Bild j ausläßt. Es gibt zwei wesentliche Faktorisierungen für die injektive Abbildung $\underline{n-1} \rightarrow \underline{n+1}$ in $\underline{\Delta}$, die zwei Werte i, j im Bild ausläßt:

$$(1) \quad \epsilon_{n+1}^j \epsilon_n^k = \epsilon_{n+1}^k \epsilon_n^{j-1} : \underline{n-1} \rightarrow \underline{n+1} \quad \text{für } k < j. \text{ Im Bild:}$$



Skizze für $\epsilon^j \epsilon^k$.



Skizze für $\epsilon^k \epsilon^{j-1}$.

Die waagerechten Geraden stehen für die Elemente aus $\underline{n-1}$ oben, \underline{n} Mitte und $\underline{n+1}$ unten.

• Alle surjektiven Abbildungen $\underline{n+1} \rightarrow \underline{n}$ in $\underline{\Delta}$ sind $\sigma^j = \sigma_n^j$ für $j = 0, 1, \dots, n$, wobei σ^j surjektiv ist und j im Bild verdoppelt.

Für eine simpliziale Menge K setzen wir $\partial_j := K(\epsilon^j)$ und $s_j := K(\sigma^j)$. Diese Daten bestimmen K . Alternativ ist in diesem Sinne eine simpliziale Menge K in \mathcal{C} festgelegt durch:

▷ die Vorgabe von Mengen K_n für $n = 0, 1, \dots$

▷ zusammen mit \mathcal{C} -Morphismen

$$\partial_i : K_n \longrightarrow K_{n-1}$$

$$s_j : K_n \longrightarrow K_{n+1}$$

für $i = 0, 1, \dots, n$, die Seiten

für $j = 0, 1, \dots, n$, die Ausartungen

welche folgende simplizielle Relationen erfüllen:

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_j &= \partial_{j-1} \partial_k && \text{für } k < j \text{ (dual zu (1))} \\ \partial_k s_j &= \begin{cases} s_{j-1} \partial_k & \text{falls } k < j \\ \text{Identität} & \text{falls } k = j, j+1 \\ s_j \partial_{k-1} & \text{falls } k > j+1 \end{cases} \\ s_k s_j &= s_{j+1} s_k && \text{für } k \leq j . \end{aligned}$$

Wir schreiben, falls notwendig, explizit $\partial_k^{(n),K}$, $\partial_k^{(n)}$ oder ∂_k^K für $\partial_k : K_n \rightarrow K_{n-1}$ und Entsprechendes für s_k .

DEFINITION 1.2. Eine simplizielle Menge K heißt **KAN-Komplex**, wenn sie folgende **Extensionseigenschaft** besitzt:

▷ Für eine beliebige Vorgabe von n Simplizes $y_0, \dots, \hat{y}_k, \dots, y_n$ in K_{n-1} ($- y_k$ entfällt $-$), welche erfüllen

$$\partial_i y_j = \partial_{j-1} y_i \quad \text{für } i < j, i \neq k, j \neq k ,$$

existiert ein Simplex $y \in K_n$, so daß gilt $\partial_i y = y_i$ für $i \neq k$.

1.1. $I := [0, 1]$ als simplizielle Menge. Sei $\delta[\underline{n}]$ die simplizielle Menge $\text{Hom}_{\underline{\Delta}}(\cdot, \underline{n}) : \underline{\Delta}^{opp} \rightarrow \mathbf{Ens}$. Das Analogon von $[0, 1]$ ist die simplizielle Menge $\delta[\underline{1}]$:

$$\begin{aligned} \delta[\underline{1}]_k &= \{ (v_0, v_1, \dots, v_k) \text{ mit } v_i = 0, 1 \text{ und } v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_k \} \\ &= \{ (0, \dots, 0, 0), (0, \dots, 0, 1), \dots, (1, \dots, 1, 1) \} \end{aligned}$$

1.2. Das kartesische Produkt. Für zwei simplizielle Mengen K und L führt man die simplizielle Menge $K \times L$ ein:

$$(K \times L)_n = K_n \times L_n , \quad \partial_n^{K \times L} = \partial_n^K \times \partial_n^L , \quad s_n^{K \times L} = s_n^K \times s_n^L$$

Die objektweise definierte Zuordnung \times läßt sich zu einem Funktor $\times : \mathbf{SimpEns} \times_{\mathbf{Cat}} \mathbf{SimpEns} \rightarrow \mathbf{SimpEns}$ erweitern.

DEFINITION 1.3. Zwei Morphismen f und g aus $\mathbf{SimpEns}[K \rightarrow L]$ sind **homotopisch** (oder *homotop*) – in Notation $f \cong g$ –, falls es einen Morphismus (Homotopie) gibt:

$$\begin{aligned} F : K \times \delta[\underline{1}] &\rightarrow L \text{ mit} \\ F(x \times (0, \dots, 0)) &= f(x) \text{ und } F(x \times (1, \dots, 1)) = g(x) . \end{aligned}$$

Für zwei KAN-Komplexe K, L ist \cong eine Äquivalenzrelation auf $\mathbf{SimpEns}[K \rightarrow L]$.

Das n -Skelett einer simpliziiellen Menge K ist das kleinste simplizielle Unterobjekt $K^{(n)}$, (d.h. $K_l^{(n)} \rightarrow K_l$ injektiv,) das alle nichtausgearteten Simplizes in Grad $\leq n$ beinhaltet.

1.3. Die Homotopie. Seien K eine simplizielle Menge und $x_0 \in K_0$. Die kleinste simplizielle Untermenge $\langle x_0 \rangle$ von K , die x_0 beinhaltet, besteht in jedem Grad aus dem ausgehend von x_0 entsprechend propagierten Element $s_0 s_0 \dots s_0(x_0)$. Ist K ein KAN-Komplex, so induziert \cong eine Äquivalenzrelation \cong auf Morphismen von Paaren

$$(2) \quad (\delta[\underline{n}], \delta[\underline{n}]^{(n-1)}) \longrightarrow (K, \langle x_0 \rangle)$$

in der Kategorie $\text{Hom}(\underline{1}, \mathbf{SimpEns})$. Die Homotopie-Gruppe $\pi_n(K)$ des KAN-Komplexes K bzgl. des Punktes $x_0 \in K_0$ ist definiert als die Menge der Äquivalenzklassen von Morphismen (2) bzgl. der Relation \cong .

1.4. Die Homologie.

1.4.1. Die Kategorie $\mathbf{DGA}b$. Diese ist die Kategorie der graduierten \mathbb{Z} -Moduln M^\cdot mit einem Differential d vom Grad -1 . Ein Homomorphismus $f : (M^\cdot, d) \rightarrow (N^\cdot, d)$ in dieser Kategorie ist verträglich mit den Graduierungen, $f(M^n) \subseteq N^n$, und mit den Differentialen, $df = fd$.

Es gibt einen kanonischen Funktor $! : \mathbf{SimpAb} \rightarrow \mathbf{DGA}b$:

Sei $C = (C_n, \partial_n, s_n)_n$ in \mathbf{SimpAb} . Wir setzen $!C := (C^\cdot, \partial)$ mit folgenden Vereinbarungen:

▷ Der Anteil von $!C$ im Grad n ist die abelsche Gruppe C_n .

▷ Das Differential $(!C)^n \rightarrow (!C)^{n-1}$ ist

$$\partial := \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i .$$

Ein Morphismus $f : C \rightarrow D$ in **SimpAb** induziert eindeutig den Morphismus $!f : !C \rightarrow !D$ durch die Bedingung: $(!f)^n = f_n$ in **Ab**.

Wir bezeichnen durch **GAb** (graduierte abelsche Gruppen) die volle Unterkategorie von **DGAb** mit Objekten $C = (C^\cdot, d = 0)$. Die Homologie von differentialgraduierten abelschen Moduln ist der Funktor

$$\begin{aligned} \mathbf{DGAb} &\xrightarrow{H} \mathbf{GAb} \\ (C^\cdot, d) &\longrightarrow ((\text{Ker } d / \text{Im } d)^{(\cdot \text{ induziert})}, 0 = d^{\text{induziert}}) \end{aligned}$$

1.4.2. *Die Abelianisierung.* $\mathbb{Z}[\cdot]$ ist der Funktor:

$$\mathbb{Z}[\cdot] : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ab},$$

der einer Menge A die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}[A]$ der formalen Summen von Elementen aus A mit \mathbb{Z} -Koeffizienten zuordnet:

$$\mathbb{Z}[A] := \left\{ \sum_{i \in I} n_i [a_i] \mid n_i \in \mathbb{Z}, a_i \in A, I \text{ endlich} \right\}.$$

Die Menge $\{[a] \mid a \in A\}$ ist eine \mathbb{Z} -Basis von $\mathbb{Z}[A]$. Auf Abbildungen ist $\mathbb{Z}[\cdot]$ definiert durch:

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{h} B \quad \text{in } \mathbf{Ens} \text{ geht auf} \\ \mathbb{Z}[A] &\xrightarrow{\mathbb{Z}[h]} \mathbb{Z}[B], \text{ wobei auf Basiselementen:} \\ [a] &\longrightarrow [h(a)]. \end{aligned}$$

Der Funktor $\mathbb{Z}[\cdot]$ ist links adjungiert zum Vergiß-Funktor $! : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ens}$: Die natürliche Transformation

$$\mathbf{Ens}[M \rightarrow !A] \cong \mathbf{Ab}[\mathbb{Z}[M] \rightarrow A], \quad M \text{ Menge, } A \text{ abelsche Gruppe,}$$

reflektiert Basis-Eigenschaften der Basis $\{[m]\}_{m \in M}$ von $\mathbb{Z}[M]$.

DEFINITION 1.4. *Die Homologie von simplizialen Mengen ist der Funktor H , der als Verknüpfung entsteht:*

$$\mathbf{SimpEns} \xrightarrow{\mathbf{Simp}\mathbb{Z}[\cdot]} \mathbf{SimpAb} \xrightarrow{!} \mathbf{DGAb} \xrightarrow{H} \mathbf{GAb}$$

Wir bezeichnen den Funktor zur Verknüpfung $\mathbf{SimpEns} \rightarrow \mathbf{SimpAb} \rightarrow \mathbf{DGAb}$ als $K \rightarrow (\mathbb{Z}[\cdot[K]], \partial)$. Dazu ist es oft vorteilhaft, eine normalisierte Version $K \rightarrow (\mathbb{Z}[\cdot[K]^{na}], \partial)$ zu bilden:

$\mathbb{Z}^l[K]^{na}$ ist der Quotient von $\mathbb{Z}^l[K] = \mathbb{Z}[K_i]$ nach der Untergruppe $\mathbb{Z}^l[K]^a$, die von allen ausgearteten Elementen $[a]$ erzeugt wird, wobei $a = s_i(b)$ für geeignete i, b . Das Differential $\partial : \mathbb{Z}^l[K] \rightarrow \mathbb{Z}^{l-1}[K]$ bildet $\mathbb{Z}^l[K]^a$ auf $\mathbb{Z}^{l-1}[K]^a$ ab und induziert eine Abbildung $\mathbb{Z}^l[K]^{na} \rightarrow \mathbb{Z}^{l-1}[K]^{na}$, welche auch ∂ bezeichnet wird. Die Zuordnung $K \rightarrow (\mathbb{Z}[\cdot[K]^{na}], \partial)$ läßt sich eindeutig zu einem Funktor erweitern, so daß die Bildung des Quotienten $\mathbb{Z}[\cdot[K] \rightarrow \mathbb{Z}[\cdot[K]^{na}]$ eine natürliche Transformation ist. Diese erklärt eine natürliche Äquivalenz zwischen den Funktoren

$$H \circ \mathbb{Z}[\cdot] \text{ und } H \circ \mathbb{Z}[\cdot]^{na} : \mathbf{SimpEns} \rightarrow \mathbf{DGAb} \rightarrow \mathbf{GAb}.$$

1.5. Die Funktoren R und S .

1.5.1. *Die geometrische Realisierung.* Die geometrische Realisierung R oder $|\cdot|$ ist ein Funktor von der Kategorie der simplizialen Mengen in die Kategorie der topologischen Räume. Einem Objekt G wird folgender topologischer Raum zugeordnet:

$$RG = |G| := \left(\prod_{n \geq 0} G(\underline{n}) \times \Delta_n \right) / \sim.$$

- Dabei ist die Menge $G(\underline{n})$ als topologischer Raum mit der diskreten Topologie aufgefaßt. Δ_n ist der topologische Raum aller Punkte (t_0, \dots, t_n) in $\mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1}$ mit der Eigenschaft $\sum t_i = 1$, versehen mit der von \mathbb{R}^{n+1} induzierten Topologie. (Wir werden im nächsten Unterabschnitt den funktoriellen Charakter der Bildung von Δ_n untersuchen.)
- Die Äquivalenzrelation \sim identifiziert zwei Punkte

$$(\xi_i \in G(\underline{n}_i), x_i \in \Delta_{n_i}) \in |G|, \quad \text{für } i = 1, 2$$

genau dann, wenn eine Abbildung $h : \underline{n}_1 \rightarrow \underline{n}_2$ in \underline{G} existiert, so daß sich dadurch die Elemente ξ_i und x_i entsprechen:

$$\begin{aligned} G(\underline{n}_1) \ni \xi_1 &\xleftarrow{G(h)} \xi_2 \in G(\underline{n}_2) \\ \Delta_{n_1} \ni x_1 &\xrightarrow{h_\Delta} x_2 \in \Delta_{n_2}, \end{aligned}$$

i.e. $(G(h)(\xi_2), x_1) \sim (\xi_2, h_\Delta(x_1))$.

Wir bemerken folgendes:

Jede Abbildung h aus $\underline{\Delta}$ läßt sich eindeutig faktorisieren als: $h = ip$, wobei i ein Mono- bzw. p ein Epimorphismus ist. Sei $\xi \in G(\underline{n})$ ausgeartet. Dann existiert ein Epimorphismus p , so daß in:

$$\begin{array}{ccc} \underline{n-1} & \xleftarrow{p} & \underline{n} \\ G(\underline{n-1}) & \xrightarrow{G(p)} & G(\underline{n}) \ni \xi \end{array}$$

ξ im Bild letzterer Abbildung liegt: $\xi = G(p)\xi'$. In diesem Fall ist für jedes Element der Form $(\xi, x) = (G(p)\xi', x)$ das äquivalente Element $(\xi', p_\Delta x)$ ein besserer Vertreter der gemeinsamen Klasse in dem Sinne, daß dadurch ein Simplex vom kleineren Grad benutzt wird. Es gibt genau einen Vertreter einer Äquivalenzklasse vom kleinsten Grad. Aus diesem Grund ist $|G|$ homeomorph zu einem CW-Komplex, dessen n -Zellen zu den nichtausgearteten Simplizes von G vom Grad n , i.e. $G(\underline{n})$, entsprechen.

1.5.2. *Der singuläre Komplex.* Sei **Top** die Kategorie der topologischen Räume. Wir konstruieren einen Funktor $i : \underline{\Delta} \rightarrow \mathbf{Top}$.

• Der n -Standardsimplex (oder der n -dimensionale Standardsimplex) ist die konvexe Menge:

$$\Delta_n := \{ (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1} : \sum t_i = 1 \}.$$

Seien e_0, e_1, \dots, e_n die Vektoren der kanonischen Basis von \mathbb{R}^{n+1} . Diese sind die extremalen Punkte von Δ_n . Standardsimplizes bilden eine Kategorie mit solchen affinen Abbildungen als Morphismen, die extremale Punkte auf extremale Punkte abbilden. Diese Kategorie ist äquivalent mit der Kategorie $\underline{\Delta}$ durch den Funktor, der auf Objekten \underline{n} auf Δ_n abbildet und auf Morphismen wie folgt operiert:

Eine Abbildung $h : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ in $\underline{\Delta}$ induziert sukzessive Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} \{e_0, e_1, \dots, e_m\} & \xrightarrow{h_*} & \{e_0, e_1, \dots, e_n\}, \text{ wobei } e_i \rightarrow e_{h(i)} \\ \Delta_m & \xrightarrow{h_\Delta} & \Delta_n, \end{array}$$

wobei h_Δ die Affinisierung von h_* ist: $h_\Delta(\sum \alpha_i e_i) = \sum \alpha_i e_{h(i)}$.

Der Funktor in der umgekehrten Richtung wird durch die Einschränkung auf die Extrempunkte gegeben.

• Sei X in **Top**. Die kontravariante Zusammensetzung

$$\underline{\Delta} \xrightarrow{i} \mathbf{Top} \xrightarrow{\text{Hom}(\cdot, X)} \mathbf{Ens}$$

erklärt eine simpliziale Menge SX , den singulären Komplex zu X . Er ist ein KAN-Komplex. Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ in **Top** sei $Sf := \text{Hom}(\cdot, f) \circ i : SX \rightarrow SY$. Es entsteht ein Funktor

$$S = S_\Delta : \mathbf{Top} \rightarrow (\mathbf{SimpEns} \mid \text{KAN}).$$

Die klassische ganzzahlige Homologie eines topologischen Raumes X entsteht als $H(X, \mathbb{Z}) = H(\mathbb{Z}[SX]) = H(\mathbb{Z}[SX]^{na})$.

1.5.3. *Die Adjunktion zwischen R und S .* Eine simpliziale Homotopie $F : K \times \delta[1] \rightarrow L$ induziert durch RF eine topologische Homotopie $KK \times I \cong RK \times R\delta[1] \cong R(K \times \delta[1]) \rightarrow RL$.

Umgekehrt liefert eine topologische Homotopie $h : X \times I \rightarrow Y$ durch Sh eine simpliziale Homotopie $SX \times \delta[1] \rightarrow SX \rightarrow SI \rightarrow S(X \times I) \rightarrow SY$.

Diese Zuordnungen induzieren natürliche Abbildungen $[K, L] \rightarrow [RK, RL]$ respektive $[X, Y] \rightarrow [SX, SY]$. (Dabei benutzen wir die topologische Notation $[K, L]$ bzw. $[X, Y]$ für Morphismen modulo Homotopie zwischen den simplizialen Mengen K, L bzw. zwischen den topologischen Räumen X, Y .)

Insbesondere gilt eine Verträglichkeit zwischen der topologischen und simplizialen Homotopie: $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(SX, x_0)$.

1.5.4. *Der HUREWICZ-Homomorphismus.* Sei K ein KAN-Komplex. Dann existiert ein natürlicher Homomorphismus

$$h_n : \pi_n(K) \rightarrow H_n(K),$$

genannt HUREWICZ-Homomorphismus ([Cu], (3.11) S.132). Er entsteht wie folgt: Die kanonische Adjunktion

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & !\mathbb{Z}[K], \text{ gegeben durch } K_n \ni x \rightarrow [x] \in \text{Menge } \mathbb{Z}[K_n], \text{ induziert} \\ \pi_m(K) & \longrightarrow & \pi_m(!\mathbb{Z}[K]) \cong H_m(K). \end{array}$$

1.5.5. *H-Räume*. Ein $H(\text{OPF})$ -Raum ist ein topologischer Raum X versehen mit einer stetigen Abbildung $\mu : X \times X \rightarrow X$, so daß das folgende ("2-kategoriale") Diagramm kommutiert:

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} X \times X \times X & \xrightarrow{\mu \times 1} & X \times X \\ \downarrow 1 \times \mu & & \downarrow \mu \\ X \times X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow h \\ \searrow \end{array}$$

h ist dabei eine Homotopie zwischen den Abbildungen $\mu(\mu \times 1)$ und $\mu(1 \times \mu) : X \times X \times X \rightarrow X$.

Analog definieren wir einen $H(\text{OPF})$ -KAN-Komplex als eine Struktur $(K, \mu : K \times K, h : \mu(\mu \times 1) \cong \mu(1 \times \mu))$, so daß K ein KAN-Komplex ist, und das Diagramm (3) mit X ersetzt durch K kommutiert. Die Bedeutung der H-Raum-Struktur für unsere Zwecke ist die Relation

$$\pi.(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \text{Prim } H.(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}.$$

"Prim" steht für den primitiven Anteil der Hopf-Algebra $H.(X, \mathbb{Z})$ zu einem H-Raum X .

1.6. Das Koproduct in der Homologie.

1.6.1. *Das Theorem von Eilenberg-Zilber*. Seien K und L in **SimpEns**. Dann gibt es Komplex-Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[K \times L] &\xrightleftharpoons[g]{f} \mathbb{Z}[K] \otimes \mathbb{Z}[L] \quad \text{und} \\ \mathbb{Z}[K \times L]^{na} &\xrightleftharpoons[g]{f} \mathbb{Z}[K]^{na} \otimes \mathbb{Z}[L]^{na}, \end{aligned}$$

welche sich als natürliche Äquivalenzen zwischen Funktoren $\mathbf{SimpEns} \times \mathbf{SimpEns} \rightarrow \mathbf{DGAb}$ erweisen. Eine mögliche Wahl von f und g ist:

$$(4) \quad f([x \times y]) := \sum_{i=0}^n \tilde{\partial}^{n-i}[x] \otimes \partial_0^i[y] \quad \text{für } x \in K_n, y \in L_n,$$

$$(5) \quad g([x] \otimes [y]) := \sum_{\sigma=(\mu, \nu)} (-1)^{|\sigma|} [s_{\nu_q} \dots s_{\nu_1} x \times s_{\mu_p} \dots s_{\mu_1} y] \quad \text{für } x \in K_p, y \in L_q,$$

Erklärungen:

- $\tilde{\partial}$ bezeichnet in (4) das "letzte" Differential. $\tilde{\partial} : K_n \rightarrow K_{n-1}$ ist also $\partial_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$. Der obere Index steht für die wiederholte Anwendung: $\tilde{\partial}^{n-i}[x] := \partial_{i+1} \dots \partial_n[x]$ und $\partial_0^i[y] := \partial_0 \dots \partial_0[y]$.

- Die Summe in (5) läuft über alle (p, q) -Shuffles σ assoziiert zu den Paaren $\mu = (\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p)$ und $\nu = (\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_q)$, so daß gilt:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p & p+1 & p+2 & \dots & p+q \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_p & \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_q \end{pmatrix}.$$

$(-1)^{|\sigma|}$ ist das Signum der Permutation σ .

1.6.2. *Das Koproduct*. Sei K in **SimpEns**. Sei $\Delta : K \rightarrow K \times K$ die simpliziale Abbildung, welche ein Element $x \in K_n$ auf das Element $x \times x \in (K \times K)_n$ abbildet. (Δ ist die simpliziale diagonale Abbildung.) Die Verknüpfung

$$\mathbb{Z}[K] \xrightarrow{\mathbb{Z}[\Delta]} \mathbb{Z}[K \times K] \xrightarrow{f} \mathbb{Z}[K] \times \mathbb{Z}[K]$$

wird auch durch Δ bezeichnet. Es gibt eine Homotopie $(\Delta \otimes 1)\Delta \cong (1 \otimes \Delta)\Delta$, denn $\Delta : K \rightarrow K \times K$ erfüllt $(\Delta \times 1)\Delta = (1 \times \Delta)\Delta$, und f ist assoziativ bis auf Homotopie.

2. Die S.–Konstruktion von WALDHAUSEN

2.1. Exakte Kategorien. Eine Kategorie \mathcal{C} ist eine **additive** Kategorie, falls sie folgende Eigenschaften hat:

- ▷ Es gibt ein gleichzeitig initiales und finales Objekt $0 \in \text{Ob}\mathcal{C}$, genannt Nullobjekt.
- ▷ Es existiert die direkte Summe und das direkte Produkt zweier Objekte.
- ▷ Für jede zwei Objekte A, B in \mathcal{C} ist $\mathcal{C}[A \rightarrow B]$ eine abelsche Gruppe. Die partiell definierte Verknüpfung von Morphismen ist bilinear. Die Gruppoperation wird durch $+$ oder $+_{\mathcal{C}}$ bezeichnet. (Als Referenz kann z.B. [Sr], App. B, S.297 dienen.)
- Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwischen zwei additiven Kategorien ist **additiv**, falls er Nullobjekte und direkte Summen und Produkte in Entsprechendes abbildet, und gilt:

$$F(g +_{\mathcal{C}} h) = F(g) +_{\mathcal{D}} F(h)$$

für $g, h \in \text{Arr}\mathcal{C}$ mit dem gleichen Träger und Wertebereich.

- Eine additive Kategorie \mathcal{A} heißt **abelsch**, falls gilt:
 - ▷ Jeder Morphismus $f \in \text{Arr}\mathcal{A}$ hat einen Kern und einen Kokern und
 - ▷ die kanonische Abbildung $\text{Coim}f \rightarrow \text{Im}f$ ist ein Isomorphismus. ([Sr], S.297)
- Für unsere Zwecke ist eine **exakte** Kategorie eine additive Kategorie \mathcal{C} , für die es einen additiven, vollen Einbettungsfunktor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ in eine abelsche Kategorie \mathcal{A} gibt, so daß gilt:
 - ▷ Für jede exakte Sequenz in \mathcal{A}

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

mit Objekten A' und A'' in \mathcal{C} gibt es ein Objekt A_1 in \mathcal{C} , so daß A und A_1 in \mathcal{A} isomorph sind.

- Die **exakten Sequenzen** von \mathcal{C} sind die exakten Sequenzen von \mathcal{A} , welche nur \mathcal{C} -Objekte beinhalten.
- Ein **exakter Funktor** zwischen zwei exakten Kategorien ist ein additiver Funktor, der exakte Sequenzen in exakte Sequenzen abbildet. Wir führen folgende Notationen ein:
 - (**ExCat**) ist die Kategorie, welche exakte Kategorien als Objekte und exakte Funktoren als Morphismen hat.
 - (**ExCat** | *small*) ist die volle Unterkategorie von (**ExCat**) mit **kleinen** exakten Kategorien als Objekten.
- Ein Morphismus in einer exakten Kategorie heißt **ausgezeichneter** (oder **distinguierter**) Mono- bzw. Epimorphismus, falls er als solches in einer exakten Sequenz wie oben als $A' \rightarrow A$ bzw. als $A \rightarrow A''$ auftaucht. Ausgezeichnete Monomorphismen werden als \rightarrowtail stillschweigend gekennzeichnet, und ausgezeichnete Epimorphismen als \twoheadrightarrow .

Für zwei abelsche Kategorien \mathcal{A} und \mathcal{B} trägt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ eine kanonische Struktur einer abelschen Kategorie. Entsprechend ist $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ eine exakte Kategorie für zwei exakte Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{D} .

2.2. WALDHAUSEN–Kategorien. Eine punktierte Kategorie ist eine Kategorie mit einem ausgezeichneten, gleichzeitig initialen und finalen Objekt $*$. Die Morphismen zwischen punktierten Kategorien sind Funktoren, welche $*$ auf $*$ abbilden.

- Eine **Kategorie mit Kofaserungen** ist eine punktierte Kategorie \mathcal{C} , versehen mit einer Unterkategorie $\text{co}\mathcal{C}$ mit den gleichen Objekten wie \mathcal{C} . Die Morphismen in $\text{co}\mathcal{C}$ heißen Kofaserungen und werden durch \twoheadrightarrow bezeichnet. Zusätzlich müssen gelten:
 - ▷ Die Isomorphismen von \mathcal{C} sind in $\text{co}\mathcal{C}$.
 - ▷ Der Morphismus $* \rightarrow A$ ist in $\text{co}\mathcal{C}$ für alle $A \in \text{Ob}\mathcal{C} = \text{Obco}\mathcal{C}$.
 - ▷ Jedes Diagramm (6, links) in \mathcal{C} läßt sich zu einem Push-Out-Diagramm (6, rechts) erweitern, so daß $C \twoheadrightarrow C \cup_A B$ auch eine Kofaserung ist.

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & & C \cup_A B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ & \text{PO} & \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\quad} & C \cup_A B \end{array}$$

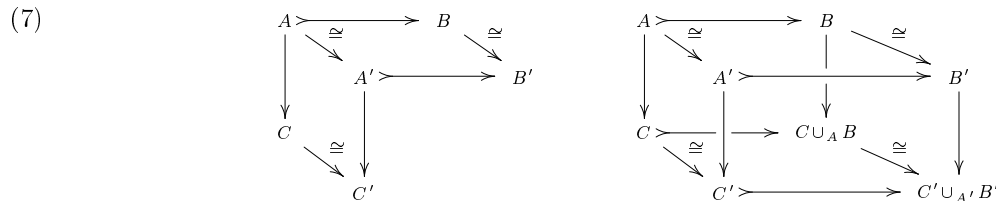
Ein Funktor zwischen den Kategorien mit Kofaserungen $F : (\mathcal{C}, \text{co}\mathcal{C}, *) \rightarrow (\mathcal{D}, \text{co}\mathcal{D}, *)$ ist ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, der $\text{co}\mathcal{C}$ auf $\text{co}\mathcal{D}$ abbildet, und $*$ auf $*$. Ein solcher Funktor heißt **exakt**, falls er PO-Diagramme der Form (6, rechts) in PO-Diagramme abbildet. Die Kategorien mit Kofaserungen als Objekten und den exakten Funktoren als Homomorphismen bilden eine Kategorie **Cof**.

Jede exakte Kategorie \mathcal{C} (mit einem ausgezeichneten Nullobjekt 0) kann als Kategorie mit Kofaserungen $!\mathcal{C}$ angesehen werden: $\text{co}!\mathcal{C}$ besteht aus den distinguerten Monomorphismen.

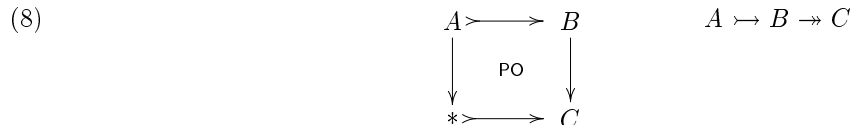
• Eine **WALDHAUSEN-Kategorie** ist eine Kategorie $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \mathbf{co}\mathcal{C}, *) \in \mathbf{ObCof}$, versehen mit einer Unterkategorie $w\mathcal{C}$ von \mathcal{C} mit gleichen Objekten. Die Morphismen in $w\mathcal{C}$ heißen “schwache Äquivalenzen” und werden mit \cong gekennzeichnet. Zusätzlich gelten:

▷ Die Isomorphismen von \mathcal{C} sind in $w\mathcal{C}$.

▷ Jedes Diagramm (7, links) mit $A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C'$ in $\mathbf{Arr} w\mathcal{C}$ induziert durch PO (i.e. Push-Out) ein Diagramm (7, rechts), so daß der kanonische Morphismus $C \cup_A B \rightarrow C' \cup_{A'} B'$ auch in $w\mathcal{C}$ liegt:



Ist ein Diagramm der Form (8, links) ein Push-Out, so schreiben wir äquivalent (8, rechts):



Das Objekt C im obigen PO-Diagramm ist bis auf Isomorphismus bestimmt. Wählen wir ein solches C , so ist der Morphismus $B \rightarrow C$ bis auf einen Automorphismus von C bestimmt. Aus diesem Grund führen wir folgende

KONVENTION 2.1. *Arbeiten wir mit Objekten \mathcal{C} aus der Kategorie **Cof** (oder **ExCat**, **Wald**, ...), so nehmen wir immer stillschweigend an, daß wir zu jedem Morphismus $A \rightarrow B$ in der Kategorie \mathcal{C} ein PO-Diagramm (8, links) gewählt haben. Nach dieser Wahl nennen wir das Objekt C und den Morphismus $B \rightarrow C$ **erwählt für $A \rightarrow B$** .*

Ein **exakter** Funktor zwischen WALDHAUSEN-Kategorien $F : (\mathcal{C}, \mathbf{co}\mathcal{C}, w\mathcal{C}, *) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathbf{co}\mathcal{D}, w\mathcal{D}, *)$ ist ein exakter Funktor zwischen Kategorien mit Kofaserungen $F : (\mathcal{C}, \mathbf{co}\mathcal{C}, *) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathbf{co}\mathcal{D}, *)$, welcher die Unterkategorie $w\mathcal{C}$ von \mathcal{C} auf $w\mathcal{D}$ abbildet. Die WALDHAUSEN-Kategorien als Objekte mit exakten Funktoren als Morphismen bilden eine Kategorie **Wald**. Der Funktor $\mathbf{Iso} : \mathbf{Cof} \rightarrow \mathbf{Wald}$, der $(\mathcal{C}, \mathbf{co}\mathcal{C}, *)$ mit der Kategorie der Isomorphismen von \mathcal{C} , $\mathbf{Iso}\mathcal{C}$, anreichert:

$$\mathbf{Iso}(\mathcal{C}, \mathbf{co}\mathcal{C}, *) := (\mathcal{C}, \mathbf{co}\mathcal{C}, \mathbf{Iso}\mathcal{C}, *) ,$$

ist links adjungiert zu dem kanonischen Vergiß-Funktor $! : \mathbf{Wald} \rightarrow \mathbf{Cof}$:

$$\mathbf{Cof}[\mathcal{C} \rightarrow !\mathcal{W}] \cong \mathbf{Wald}[\mathbf{Iso}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{W}] \quad \text{für } \mathcal{C} \in \mathbf{ObCof} \text{ und } \mathcal{W} \in \mathbf{ObWald} .$$

2.3. Der Funktor \oplus . Sei \mathcal{C} eine exakte Kategorie mit erwählten Objekten und Isomorphismen. Seien A, B Objekte in \mathcal{C} . Eine direkte Summe von A und B existiert in der umgebenden abelschen Kategorie, also auch in \mathcal{C} . Wir schreiben $A \oplus B$ für das erwählte Objekt in der Isomorphieklasse der direkten Summen von A und B . Wir erweitern des weiteren diese objektweise definierte Zuordnung auf einen Funktor:

$$\oplus : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} .$$

2.4. Kategorien mit einem initialen Objekt. Wir bezeichnen durch $(\mathbf{Cat} \mid I)$ die Kategorie mit

Objekten: (\mathcal{C}, I) , wobei \mathcal{C} Kategorie und I (ein festgelegtes) initiales Objekt I in \mathcal{C} sind,

Morphismen: solche Funktoren, welche die festgelegten initialen Objekte ineinander abbilden.

Eine **Diagramm-Kategorie** ist eine **kleine** Kategorie \mathcal{D} , so daß es zwischen jeden zwei Objekten A, B in \mathcal{D} höchstens einen Morphismus gibt. In diesem Fall schreiben wir dafür $A \rightarrow B$, und umgekehrt bedeutet diese Schreibweise implizit, daß es diesen Morphismus gibt. Die Kategorie der Diagramm-Kategorien (mit einem initalen Objekt) wird durch **Dia** (respektive $(\mathbf{Dia} \mid I)$) bezeichnet. Wir betrachten in diesem Abschnitt $\underline{\Delta}$ als Unterkategorie von $(\mathbf{Dia} \mid I)$:

$$\underline{\Delta} \hookrightarrow (\mathbf{Dia} \mid I) \hookrightarrow (\mathbf{Cat} \mid I)$$

Wir bezeichnen durch **WaldDia** bzw. **CofDia** die Kategorie der WALDHAUSEN-Kategorien bzw. die Kategorie der Kategorien mit Kofaserungen, welche auch Diagramm-Kategorien sind.

2.5. WALDHAUSEN–Diagramme. Wir betrachten in diesem Unterabschnitt die Funktoren:

$$(\mathbf{Cat} \mid I) \xleftarrow{\text{Mono}} \mathbf{Cof} \quad \text{und} \quad (\mathbf{Cat} \mid I) \xrightarrow{\text{Wald}} \mathbf{Cof}$$

- Mono ist der Vergiß–Funktork, welcher der Kategorie mit Kofaserungen $(\mathcal{C}, \mathbf{coC}, *)$ die Kategorie $(\mathbf{coC}, *) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat} \mid I)$ zuordnet.
- Der Funktor Wald ordnet einem Objekt (D, I) in $(\mathbf{Cat} \mid I)$ die Kategorie $\text{Wald}(D, I)$ mit

Objekten: $\{ (a, b) : a \rightarrow b \text{ ist ein Morphismus in } D \} / \sim$. Dabei ist \sim die Äquivalenzrelation, welche genau dann zwei ungleiche Paare für äquivalent erklärt, wenn jedes Paar der Form (a, a) ist. Die Klasse von (a, a) für $a \in \text{Ob} D$ wird auch durch $*$ bezeichnet.

Morphismen: $(a, b) \rightarrow (a', b')$ in $\text{Wald}(D, I)$, genau dann wenn $a \rightarrow a'$ und $b \rightarrow b'$ in D .

initialem und finalem Objekt: $*$

coWald (D, I) : Es besteht genau aus Morphismen der Form $(a, b) \rightarrow (a, b')$.

- Der Funktor Wald ist links adjungiert zum Funktor Mono: Für $D \in \text{Ob}(\mathbf{Cat} \mid I)$, $C \in \text{Ob} \mathbf{Cof}$ erklären wir dafür die natürlichen Transformationen ϵ und η :

$$(\mathbf{Cat} \mid I) [D \rightarrow \text{Mono}(C)] \xrightleftharpoons[\eta]{\epsilon} \mathbf{Cof} [\text{Wald}(D) \rightarrow C] .$$

Beschreibung von η : Die Präsenz eines initialen Objektes I ergibt einen Einbettungsfunktork $(D, I) \hookrightarrow (\text{Wald}(D), *)$, $a \mapsto (I, a)$ innerhalb von $(\mathbf{Cat} \mid I)$. Der Pull–Back durch diese Einbettung ergibt η :

$$\begin{array}{ccc} [D \xrightarrow{\eta(F)} \text{Mono}(C)] & \xleftarrow{\eta} & [\text{Wald}(D) \xrightarrow{F} C] \\ a \longrightarrow & & F(I, a) \\ (a \rightarrow b) \longrightarrow & & F((I, a) \rightarrow (I, b)) \end{array}$$

Beschreibung von ϵ :

$$\begin{array}{ccc} [D \xrightarrow{G} \text{Mono}(C)] & \xrightarrow{\epsilon} & [\text{Wald}(D) \xrightarrow{\epsilon(G)} C] \\ (a, b) \longrightarrow & & * \cup_{G(a)} G(b) \\ ((a, b) \rightarrow (a', b')) \longrightarrow & & (* \cup_{G(a)} G(b) \rightarrow * \cup_{G(a')} G(b')) \end{array}$$

Im Sinne der Konvention 2.1 steht dabei $* \cup_{G(a)} G(b)$ für das erwähnte Objekt für die Kofaserung $G(a) \twoheadrightarrow G(b)$, und der Morphismus $* \cup_{G(a)} G(b) \rightarrow * \cup_{G(a')} G(b')$ entsteht eindeutig aus der universellen Eigenschaft des POs im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} G(a) & \twoheadrightarrow & G(b) & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & G(a') & \twoheadrightarrow & G(b') & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \text{erw.} & & \downarrow \text{erw.} \\ * & \twoheadrightarrow & * \cup_{G(a)} G(b) & \xrightarrow{\exists!} & * \cup_{G(a')} G(b') \end{array}$$

unter Verwendung der erwähnten Morphismen $G(b) \rightarrow * \cup_{G(a)} G(b)$ und $G(b') \rightarrow * \cup_{G(a')} G(b')$.

2.6. Die S.–Konstruktion. Sei \mathcal{C} eine exakte Kategorie. Die S.–Konstruktion zu \mathcal{C} ist

$$\mathbf{S.C} := \mathbf{Cof} [\text{Wald}(\underline{\cdot}) \rightarrow !\mathcal{C}] ,$$

die simplizielle Menge, die sich als Verknüpfung der Funktoren

$$\underline{\Delta} \longrightarrow (\mathbf{Dia} \mid I) \longrightarrow (\mathbf{Cat} \mid I) \xrightarrow{\text{Wald}} \mathbf{Cof} \xrightarrow{\text{Hom}_{ex}(\cdot, \mathcal{C})} \mathbf{Ens}$$

ergibt. Ein Bild des Diagramms $\text{Wald}(\underline{n})$ ist:

$$(9) \quad \begin{array}{ccccccc} * & \longrightarrow & (0,1) & \longrightarrow & (0,2) & \longrightarrow & (0,3) & \cdots & (0,n-1) & \longrightarrow & (0,n) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & * & \longrightarrow & (1,2) & \longrightarrow & (1,3) & \cdots & (1,n-1) & \longrightarrow & (1,n) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & * & \longrightarrow & (2,3) & \cdots & (2,n-1) & \longrightarrow & (2,n) \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & & & * & \cdots & (3,n-1) & \longrightarrow & (3,n) \\ & & & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & & & & & * & \longrightarrow & (n-1,n) \\ & & & & & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & & & & & * \end{array}$$

So ist ein Simplex im Grad n von $S.C$ ein kommutatives Diagramm in \mathcal{C}

$$(10) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \xi_{01} & \longrightarrow & \xi_{02} & \longrightarrow & \xi_{03} & \cdots & \xi_{0,n-1} & \longrightarrow & \xi_{0n} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & \longrightarrow & \xi_{12} & \longrightarrow & \xi_{13} & \cdots & \xi_{1,n-1} & \longrightarrow & \xi_{1n} \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & \longrightarrow & \xi_{23} & \cdots & \xi_{2,n-1} & \longrightarrow & \xi_{2n} \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & & & 0 & \cdots & \xi_{3,n-1} & \longrightarrow & \xi_{3n} \\ & & & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & & & & & 0 & \longrightarrow & \xi_{n-1,n} \\ & & & & & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & & & & & 0 \end{array},$$

so daß die Sequenzen

$$0 \rightarrow \xi_{ij} \rightarrow \xi_{ik} \rightarrow \xi_{jk} \rightarrow 0 \quad \text{für } 0 \leq i < j < k \leq n$$

kurzexakt sind. Die Ableitung ∂_i eines solchen Diagramms entsteht durch Streichung der Zeile und Spalte durch den 0-Eintrag an der Stelle (i, i) .

3. Die G.-Konstruktion von GILLET und GRAYSON

3.1. Die Funktoren $*$ und $!$ Wir betrachten nun kanonisch $\underline{\Delta}$ einerseits als Unterkategorie von **Dia** andererseits als Unterkategorie von $(\mathbf{Dia} \mid I)$, wie es folgendes Diagramm zeigt:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\Delta} & \xrightarrow{*} & \underline{\Delta} & \xrightarrow{!} & \underline{\Delta} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Dia} & \xrightarrow{*} & (\mathbf{Dia} \mid I) & \xrightarrow{!} & \mathbf{Dia} \end{array}$$

$!$ ist der Vergiß-Funktor und $*$ ist der Funktor, der ein initiales Objekt $*$ adjungiert. Der einzige Morphismus nach $*$, dem neuen Objekt, ist die Identität von $*$. Der Funktor $*$ ist linksadjungiert zu $!$. Der Adjunktions-Morphismus $\underline{n} \rightarrow ! * \underline{n}$ ist $\epsilon^0 : \underline{n} \rightarrow \underline{n+1}$.

3.2. Notationen.

- Für eine Kategorie \mathbf{C} bezeichnen wir mit $(\mathbf{C} \mid \mathbf{sub})$ die Kategorie mit

Objekten: Paare $(A, \mathbf{sub}A)$ von Objekten $A, \mathbf{sub}A \in \mathbf{C}$ mit einem Morphismus $s : \mathbf{sub}A \rightarrow A$, der als Teil der Struktur festgelegt wurde. Ist \mathbf{C} eine Kategorie von Kategorien, so fordern wir, daß s eine volle Einbettung ist.

Morphismen: Paare $(f, \mathbf{sub}f)$ von Morphismen in \mathbf{C} , so daß kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{sub}A & \xrightarrow{s} & A \\ \mathbf{sub}f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbf{sub}B & \xrightarrow{s} & B \end{array}$$

Die Zuordnung $\underline{n} \longrightarrow (! * \underline{n}, \mathbf{sub}(! * \underline{n}) := \underline{n})$ erklärt einen Funktor $\underline{\Delta} \longrightarrow (\underline{\Delta} \mid \mathbf{sub})$. Im Sinne der natürlichen Verknüpfung

$$\underline{\Delta} \longrightarrow (\underline{\Delta} \mid \mathbf{sub}) \xrightarrow{\text{Wald}} (\mathbf{Wald} \mid \mathbf{sub})$$

betrachten wir $\mathbf{Wald}(! * \underline{n})$ als Objekt in $(\mathbf{Wald} \mid \mathbf{sub})$, und wir identifizieren $\mathbf{sub}\mathbf{Wald}(! * \underline{n})$ mit $\mathbf{Wald}(\underline{n})$.

- Seien $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{H}$ Kategorien. Sei τ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. In Notation: $\tau : F \vdash G$. Ist τ eine natürliche Äquivalenz so notieren wir dies durch $\tau : F \vDash G$ oder vollständig durch $(F \xlongequal{\tau} G) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Seien $A : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ und $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ beliebige Funktoren. τ induziert dann:

- \triangleleft : eine natürliche Transformation zwischen den Funktoren $FA := A^*(F)$ und $GA := A^*(G)$, die wir durch $A^*(\tau)$ bezeichnen, und
- \triangleleft : eine natürliche Transformation zwischen den Funktoren $HF := H_*(F)$ und $HG := H_*(G)$, die wir durch $A_*(\tau)$ bezeichnen.

3.3. Die G.-Konstruktion. Sei \mathcal{C} eine exakte Kategorie. Die n -Simplizes der simpliziiellen Menge $\mathbf{G.C}$ sind definiert als:

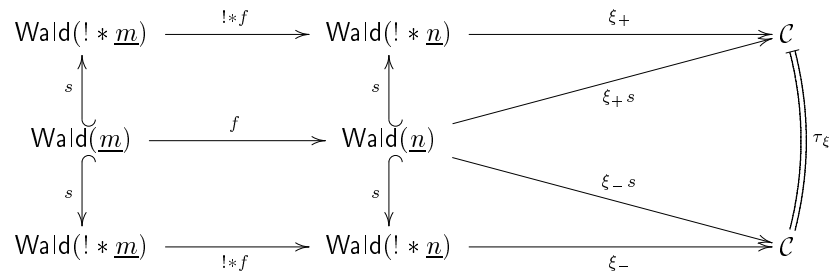
$$\mathbf{G.C}(\underline{n}) := \left\{ \begin{array}{l} \xi_{\pm} \in \mathbf{Cof}[\mathbf{Wald}(! * \underline{n}) \rightarrow \mathcal{C}] = \mathbf{S.C}(\underline{n} + 1) \text{ und} \\ \xi = (\xi_+, \xi_-, \tau_{\xi}) : \quad s^* \xi_+ \xlongequal{\tau_{\xi}} s^* \xi_- \text{ ist eine natürliche Äquivalenz} \\ \text{zwischen Funktoren } \mathbf{Wald}(\underline{n}) \xrightarrow{s} \mathbf{Wald}(! * \underline{n}) \xrightarrow{\xi_{\pm}} \mathcal{C} \end{array} \right\}$$

Elemente $(\xi_+, \xi_-, \tau_{\xi}) \in \mathbf{G}_n \mathcal{C}$ entsprechen Diagrammen der Form:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Wald}(! * \underline{n}) & \xrightarrow{\xi_+} & \mathcal{C} \\ \uparrow s & \nearrow \xi_+ s & \uparrow \tau_{\xi} \\ \mathbf{Wald}(\underline{n}) & & \\ \downarrow s & \searrow \xi_- s & \downarrow \\ \mathbf{Wald}(! * \underline{n}) & \xrightarrow{\xi_-} & \mathcal{C} \end{array}$$

Ein Morphismus

$$\begin{array}{ccc} \underline{m} & \xrightarrow{f} & \underline{n} \quad \text{in } \underline{\Delta} \text{ induziert} \\ \mathbf{G.C}(\underline{m}) & \xleftarrow{\mathbf{G.C}(f)} & \mathbf{G.C}(\underline{n}), \quad \text{gegeben durch} \\ ((! * f)^* \xi_+, (! * f)^* \xi_-, f^* \tau_{\xi}) & \longleftarrow & (\xi_+, \xi_-, \tau_{\xi}), \quad \text{wie das Diagramm} \end{array}$$



es erklärt. $G.C$ ist mit diesen Vereinbarungen eine simpliziale Menge.

3.4. Variante der G.-Konstruktion. Wir definieren G^-C als simpliziale Untermenge von $G.C$, bestehend aus den n -Simplizes (ξ_+, ξ_-, τ_ξ) , für welche τ_ξ die Identität ist, i.e. $s^* \xi_+ = s^* \xi_-$.

3.5. Bemerkungen.

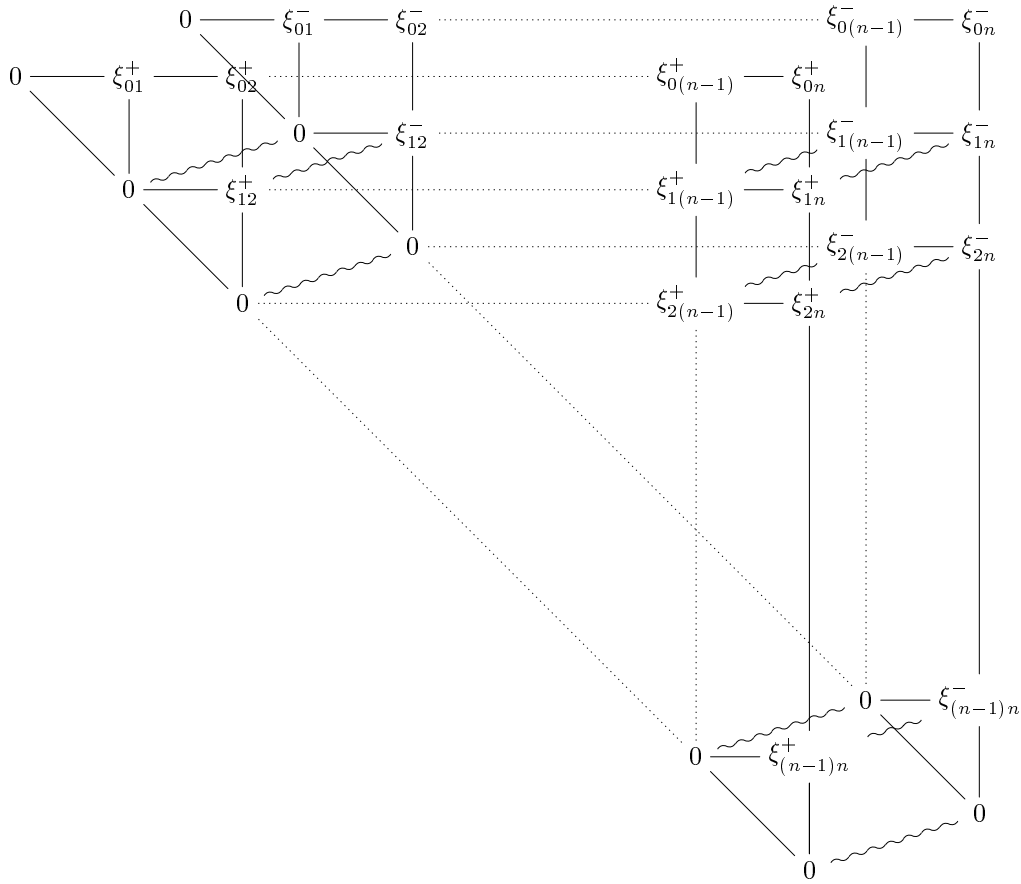
- s^* kann mit $\partial_0^{s.C} := S.C(\epsilon^0 : \underline{n} \rightarrow \underline{n+1})$ identifiziert werden.

Ein n -Simplex ξ kann als Paar (ξ_+, ξ_-) von Waldhausen-Diagrammen ξ_\pm der Größe $(n+1)$ aufgefaßt werden, so daß ein Isomorphismus τ_ξ zwischen den Waldhausen-Diagrammen der Größe n $s^* \xi_+ = \partial_0^{s.C} \xi_+$ und $s^* \xi_- = \partial_0^{s.C} \xi_-$ als Teil der Struktur zusätzlich festgelegt wird.

Ist $n = 0$ so kann $G.C(\underline{0})$ mit der Menge $\{(\xi_+, \xi_-) \mid \xi_\pm \in Ob C\}$ identifiziert werden.

Die Visualisierung eines Elements aus $G.A(\underline{n-1})$ ist gegeben durch folgendes Diagramm:

(11)



Die parallelen Diagramme vom Typ (10) mit den Objekten ξ_{ij}^+ respective ξ_{ij}^- sind **mit Ausnahme der oberen Zeilen** durch die Isomorphismen $\tau_{\xi,ij} : \xi_{ij}^+ \rightsquigarrow \xi_{ij}^-$ verbunden. Die Ausartungen dieser Diagramme entsprechen der Entfernung der Paare von Zeilen und von Spalten, die durch eine diagonal stehende Null auf der Position (i, i) , $i \neq 0$, gehen.

• Die G -Konstruktion von GILLET und GRAYSON realisiert ein *delooping* der WALDHAUSEN-Konstruktion. Es ist für unsere Zwecke vorteilhaft, nach [Gr] die Idee dieser Konstruktion zu skizzieren.

Sei \mathcal{C} eine exakte Kategorie. Die einzige Form eines WALDHAUSEN-Diagramms im Grad Null ist 0, das ausgezeichnete Nullobjekt. WALDHAUSEN-Diagramme ξ und η in den Graden 1 respective 2 sind der Form

$$\begin{array}{ccc}
 0 \rightrightarrows \xi_{01} & \text{respektive} & 0 \rightrightarrows \eta_{01} \rightrightarrows \eta_{02} \\
 \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\
 & & 0 \rightrightarrows \eta_{12} \\
 & & \downarrow \\
 & & 0
 \end{array}$$

Betrachten wir diese Elemente in dem Komplex $\mathbb{Z}[\mathcal{S}\mathcal{C}]$, so gilt $\partial[\xi] = [0] - [0] = 0$, und erst im Grad 2 erhalten wir nach Anwendung des Differentials die typischen K-theoretischen Relationen der Grothendieck-Gruppe:

$$\partial[\eta] = [\eta_{12}] - [\eta_{02}] + [\eta_{01}] .$$

$K_0(\mathcal{C})$ ist definiert als Quotient der freien abelschen Gruppe, erzeugt von Paaren (P, Q) von Objekten aus \mathcal{C} . Dieser Quotient entsteht durch Austeilen der Relationen:

$$(P, Q) \sim (P', Q') \text{ genau dann, wenn } [P] - [Q] = [P'] - [Q'] .$$

Wir betrachten die schwächere Relation:

$$(P, Q) \approx (P'Q')$$

genau dann, wenn zulässige Monomorphismen

$P \rightarrowtail P'$ und $Q \rightarrowtail Q'$ existieren,

so daß die Kokerne P/P' und Q/Q' isomorph sind.

Die Beobachtung von GILLET und GRAYSON ist, daß die zu \sim und \approx assoziierten Äquivalenzrelationen gleiche GROTHENDIECK-Gruppen haben, und man kann eine ähnliche Verbindung auch in höheren Graden herstellen. Einem Paar $(\xi_+, \xi_-) \in \mathcal{GC}(\underline{0})$ entspricht das Element $[\xi_+] - [\xi_-]$ in der GROTHENDIECK-Gruppe $K_0(\mathcal{C})$.

4. Die Bar-Konstruktion

Seien k ein Ring und R eine k -Algebra. Für unsere Zwecke ist der Fall relevant: $k = \mathbb{Z}$ und R ist der Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ zur Gruppe G . Für K-theoretische Zwecke ist weiter G als $GL_n(F)$ oder $GL(F)$ spezialisiert. $GL_n(F)$ ist die allgemeine lineare Gruppe der Vektorraum-Isomorphismen von F^n über dem Körper F , und $GL(F)$ ist der induktive Limes der Gruppen $GL_n(F)$ bezüglich der diagonalen Einbettungen $GL_n(F) \rightarrow GL_{n+1}(F)$, $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

NOTATION 4.1. Wir bezeichnen durch $B_n(R)$ oder $Bar_n(k, R, k)$ den k -Modul:

$$k \otimes_R R^{\otimes(n+2)} \otimes_R k,$$

wobei \otimes ohne Index für \otimes_k steht.

Das Element $1_k \otimes_R 1_R \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1_R \otimes_R 1_k$ wird standardmäßig als das Bar-Symbol bezeichnet:

$$[x_1|x_2|\dots|x_n], \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in R.$$

Insbesondere ist $B_0(R) = k[\] \cong k$. Wir schreiben auch k für den im Grad Null getragenen Komplex mit dem Null-Eintrag gleich k .

Auf dem graduierten k -Modul $B.(R) = Bar.(k, R, k)$ mit dem Anteil im Grad n gleich zu $B_n(R) = Bar_n(k, R, k)$ führen wir eine zusätzliche Struktur ein: Seien $\xi := [x_1|x_2|\dots|x_n] \in B_n(R)$ und $\eta := [y_1|y_2|\dots|y_m] \in B_m(R)$.

Das Differential: $d : B_n(R) \rightarrow B_{n-1}(R)$ ist gegeben durch:

$$d[x_1|x_2|\dots|x_n] := [x_2|\dots|x_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [x_1|\dots|x_{i-1}|x_i x_{i+1}|\dots|x_n] + (-1)^n [x_1|\dots|x_{n-1}].$$

Die Einheit: Die Komplex-Abbildung $k \cong k[\] = B_0(R) \rightarrow B.(R)$.

Die Koeinheit: Die Komplex-Abbildung $B.(R) \rightarrow B_0(R) = k[\] \cong k$.

Die Konkatenation:

$$\xi \eta := [x_1|x_2|\dots|x_n|y_1|y_2|\dots|y_m] \in B_{n+m}(R).$$

Wir benötigen diese Bildung, um einfacher die folgenden Abbildungen zu beschreiben:

Die Komultiplikation Δ : $\Delta \xi := \sum_{\xi_1 \xi_2 = \xi} \xi_1 \otimes \xi_2$. Explizit:

$$(12) \quad \Delta[x_1|\dots|x_n] := \sum_{p=0}^n [x_1|\dots|x_p] \otimes [x_{p+1}|\dots|x_n].$$

Für $p=0$ und $p=n$ entstehen oben die Summanden $[\] \otimes [x_1|\dots|x_n]$ respektive $[x_1|\dots|x_n] \otimes [\]$.

Die Shuffle-Multiplikation ω : Die symmetrische Gruppe $S(n)$ operiert von links auf Bar-Symbolen vermöge $[x_1|\dots|x_n]^\sigma := [x_{\sigma(1)}|\dots|x_{\sigma(n)}]$, $\sigma \in S(n)$. In unserer Notation gilt für $\xi := [x_1|\dots|x_n]$ und $\sigma, \tau \in S(n)$ die Regel: $(\xi^\sigma)^\tau = \xi^{\tau\sigma}$.

Wir bezeichnen durch $S(n_1, n_2, \dots, n_k)$ die Untergruppe von $S(n_1 + n_2 + \dots + n_k)$ der (Shuffle-)Permutationen, welche monoton auf den in \mathbb{Z} gebildeten Intervallen $[1, n_1], [n_1 + 1, n_1 + n_2], \dots, [n_1 + \dots + n_{k-1} + 1, n_1 + \dots + n_{k-1} + n_k]$ sind.

Ist die Gruppe G kommutativ, so definieren wir:

$$(13) \quad \xi \omega \eta := \sum_{\sigma \in S(n, m)} (-1)^{|\sigma|} (\xi \eta)^\sigma.$$

Im allgemeinen Fall, wo G nicht kommutativ ist, kann man mit der obigen Bildung keine Verträglichkeit mit dem Differential erwarten. Es gilt z.B. für die Abbildung ω aus (13) und $x, y \in G$:

$$d([x]\omega[y]) = d([x]y - [y]x) = [y] - [xy] + [x] - [x] + [yx] - [y] = [yx] - [xy],$$

$$(d[x])\omega[y] - [x]\omega(d[y]) = 0\omega[y] - [x]\omega 0 = 0.$$

Aus diesem Grund verlangen wir weitere Daten, welche eine "äußere" Version von (13) "innerlich" implementieren:

★ Wir gehen davon aus, daß G von der Form $\varinjlim G_n$ ist, wobei G_n Untergruppen von G für alle $n \in \mathbb{N}$ sind.

★ Seien $R_n := k[G_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt dann $R = \varinjlim R_n$.

★ Gegeben sind des weiteren Einbettungen:

$$I^1 = I_{n,m}^1 : G_n \rightarrow G_{N(n,m)} ,$$

$$I^2 = I_{n,m}^2 : G_m \rightarrow G_{N(n,m)} ,$$

und natürliche Zahlen $N(n, m)$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Die Funktion N erfüllt

$$N(N(n, m), k) = N(n, N(m, k)) , \quad \text{und wir schreiben dafür } N(n, m, k) , n, m, k \in \mathbb{N} ,$$

und die Inklusionen I^1, I^2 sind verträglich im Sinne, daß kommutiert:

$$(14) \quad \begin{array}{ccccc} & & & I^1 & \\ & & & \nearrow & \\ G_n & \xrightarrow{I^1} & & & G_{N(n,m,k)} \\ & \searrow I^2 & & & \\ & & G_{N(n,m)} & \xrightarrow{I^1} & \\ G_m & \xrightarrow{I^1} & & & \\ & \searrow I^2 & & & \\ & & G_{N(m,k)} & \xrightarrow{I^2} & \\ G_k & \xrightarrow{I^1} & & & \\ & \searrow I^2 & & & \\ & & & I_2 & \end{array}$$

Wir stellen die Bedingung, daß **das Bild von $I_{n,m}^1$ mit dem Bild von $I_{n,m}^2$ kommutiert**. Wir geben anschließend Beispiele.

Wir erweitern natürlich die Abbildungen I^a , $a = 1, 2$, auf Bar-Elemente, indem wir definieren:

$$I^a[x_1 | \dots | x_n] := [I^a x_1 | \dots | I^a x_n] .$$

★ Wir definieren $\sqcup : B_n(R_\nu) \otimes B_m(R_\mu) \rightarrow B_{n+m}(R_{N(\nu,\mu)})$ durch:

$$\xi \sqcup \eta := (I^1 \xi) \sqcup (I^2 \eta) ,$$

und erhalten natürlich eine Abbildung $\sqcup : B.(R) \otimes B.(R) \rightarrow B.(R)$.

Der Antimorphismus S : Sei $\text{inv} = \text{inv}_n$ die Permutation aus $S(n)$, gegeben durch $\text{inv}(i) = (n+1) - i$. Es gilt $\text{inv}^2 = \text{id}$. Wir definieren $S : B.(R) \rightarrow B.(R)$ auf $B_n(R)$ durch:

$$S[x_1 | \dots | x_n] := (-1)^{|\text{inv}|} [x_n^{-1} | \dots | x_1^{-1}] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} [x_n^{-1} | \dots | x_1^{-1}] .$$

BEISPIEL 4.2. Ist G eine kommutative Gruppe, so können wir wählen: $G_n := G$, $N(n, m) := 1998$ und I^1, I^2 als die Identität von G . Dann ist \sqcup gleich \sqcup .

BEISPIEL 4.3. Sei F ein Körper, und seien $G_n := GL_n(F)$, $G := \varinjlim G_n = GL(F)$. Wir definieren $N(n, m) := n + m$ und in Matrizenblockformat:

$$I_{n,m}^1(A_n) := \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & 1_m \end{bmatrix} , I_{n,m}^2(B_m) := \begin{bmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & B_m \end{bmatrix} \in GL_{n+m}(F) \text{ für } A_n \in GL_n(F) , B_m \in GL_m(F) .$$

Dabei ist 1_n die Einheitsmatrix aus $GL_n(F)$.

BEISPIEL 4.4. Seien G, G_n wie im letzten Beispiel. Wir nehmen $N(n, m) := nm$ und:

$$\begin{aligned} I_{n,m}^1(A_n) &:= A_n \otimes 1_m := \text{diag}(\overbrace{A_n, \dots, A_n}^{m \text{ mal}}) , \\ I_{n,m}^1(B_m) &:= 1_n \otimes B_m := \text{diag}(\underbrace{B_m, \dots, B_m}_{n \text{ mal}}) . \end{aligned}$$

BEMERKUNG 4.5. Sei \mathcal{P} die Kategorie der F -Moduln. Die Zuordnung, definiert auf Basiselementen durch:

$$\begin{aligned} B_n(R) &\xrightarrow{\quad \quad \quad} \mathbb{Z}[\mathcal{G}_n \mathcal{P}] \\ [x_1 | x_2 | \dots | x_n] &\xrightarrow{\quad \quad \quad} \left(0 \rightarrow F^n \xrightarrow{x_1} F^n \xrightarrow{x_2} \dots \xrightarrow{x_n} F^n , 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \right) , \end{aligned}$$

induziert eine Abbildung $B.(R) \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{G}\mathcal{P}]$, welche mit Differentialen verträglich ist. Sie faktorisiert über $\mathbb{Z}[\mathcal{G}=\mathcal{P}]$.

Oben sind $x_1, x_2, \dots, x_n : F^n \rightarrow F^n$ Elemente aus $G := GL_n(F)$. Dem Symbol $[x_1 | x_2 | \dots | x_n]$ wird ein Paar von WALDHAUSEN-Diagrammen zugeordnet, so daß das zweite Diagramm nur triviale Einträge, und das erste Diagramm nur in der oberen Zeile nicht triviale Einträge besitzt; wir haben für beide Diagramme nur die obere Zeile vermerkt.

5. Die K-Theorie

5.1. Die K-Theorie einer exakten Kategorie. Sei \mathcal{C} eine exakte Kategorie, versehen mit einem Funktor $\oplus : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ und einer natürlichen Äquivalenz a zwischen den Funktoren $\oplus(\oplus \times 1)$ und $\oplus(1 \times \oplus)$ von $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$:

$$(15) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\oplus \times 1} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\ \downarrow 1 \times \oplus & & \downarrow \oplus \\ \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\oplus} & \mathcal{C} \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow a \\ \mathcal{C} \end{array}$$

Wir bezeichnen durch $(\mathbf{ExCat} \mid \oplus)$ die Kategorie mit:

Objekten: (\mathcal{C}, \oplus, a) wie oben,

Morphismen: Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ in \mathbf{ExCat} ist ein Morphismus zwischen (\mathcal{C}, \oplus, a) und $(\mathcal{C}', \oplus', a')$, falls gelten:

$$F \oplus = \oplus' (F \times F) \quad \text{und} \quad a' F = F a .$$

Die K-Theorie einer exakten Kategorie \mathcal{C} kann äquivalent definiert werden als:

$$\begin{aligned} K_i(\mathcal{C}) &= \pi_{i+1} |\mathbf{S.C}| \\ &= \pi_i |\mathbf{G.C}| . \end{aligned}$$

Für die Zwecke der algebraischen K-Theorie können wir uns auf exakte Kategorien \mathcal{C} mit zusätzlicher Struktur (\oplus, a) beschränken. In dieser Arbeit konzentrieren wir uns dann auf $K_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Wir betrachten das Diagramm:

$$(16) \quad \begin{array}{ccccc} & & (\mathbf{ExCat} \mid \oplus) & & \\ & \swarrow s & & \searrow g & \\ (\mathbf{SimpEns} \mid +) & & & & (\mathbf{SimpEns} \mid +) \\ & \searrow R & & \swarrow R & \\ & (\mathbf{Top} \mid +) & \xrightarrow{\Omega p} & (\mathbf{Hom} \mid +) & \xleftarrow{p} & (\mathbf{Top} \mid +) \\ & \downarrow H_{i+1} & & \downarrow \pi_i & & \downarrow H_i & \\ & (\mathbf{Ab} \mid \Delta) & & \mathbf{Ab} & & (\mathbf{Ab} \mid \Delta) & \xleftarrow{H_i} & (\mathbf{DGA} \mid \Delta) \\ & \downarrow \cdot \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & & \downarrow \cdot \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & & \downarrow \cdot \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \\ & (\mathbb{Q}\text{-mod} \mid \Delta) & \xrightarrow{\text{Prim}} & (\mathbb{Q}\text{-mod} \mid \Delta) & \xleftarrow{\text{Prim}} & (\mathbb{Q}\text{-mod} \mid \Delta) \end{array}$$

5.2. Erklärungen zu den Notation aus (16).

- $(\mathbf{Top} \mid +)$ ist die Kategorie mit Objekten (X, μ) . Dabei ist X ein topologischer Raum mit einer stetigen Abbildung $\mu : X \times X \rightarrow X$, welche assoziativ bis auf Homotopie ist. Die Homomorphismen sind mit der Zusatz-Struktur verträgliche, stetige Abbildungen.
- $(\mathbf{Hom} \mid +)$ besteht aus Paaren (X, μ) ; X ist ein Objekt in der Homotopie-Kategorie \mathbf{Hom} , und μ ist eine assoziative Abbildung $\mu : X \times X \rightarrow X$ in dieser Kategorie.
- Der kanonische Funktor p von \mathbf{Top} in die Quotienten-Kategorie \mathbf{Hom} induziert einen Funktor $(\mathbf{Top} \mid +) \rightarrow (\mathbf{Hom} \mid +)$, den wir gleichfalls mit p bezeichnen.
- Sei \mathcal{T} eine Kategorie mit einem Tensor-Produkt-Funktor $\otimes : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ und einer natürlichen Äquivalenz

$$a : \otimes(\otimes \times 1) \xrightarrow{\sim} \otimes(1 \times \otimes) \quad \text{zwischen Funktoren} \quad \mathcal{T} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} .$$

Wir bezeichnen durch $(\mathcal{T} \mid \Delta)$ die Kategorie der Objekte (M, Δ) , wobei M und $\Delta : M \rightarrow M \otimes M$ in \mathcal{T} liegen, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\Delta} & M \otimes M & \xrightarrow{\Delta \otimes 1} & (M \otimes M) \otimes M \\
 \parallel & & & & \cong \downarrow a_{M, M, M} \\
 M & \xrightarrow{\Delta} & M \otimes M & \xrightarrow{1 \otimes \Delta} & M \otimes (M \otimes M)
 \end{array}$$

Ein solcher kanonischer Funktor existiert für $\mathbb{Q}\text{-mod}$, die Kategorie der \mathbb{Q} -Vektorräume, **Ab** und **DGA**.

• Sei (\mathcal{C}, \oplus) ein Objekt in $(\mathbf{ExCat} \mid \oplus)$. Der Funktor G induziert dann eine Abbildung μ als Verknüpfung

$$(G.\mathcal{C}) \times (G.\mathcal{C}) \xrightarrow{\cong} G.(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \xrightarrow{G(\oplus)} G.(\mathcal{C}) ,$$

und entsprechend das Objekt $(G.(\mathcal{C}), \mu)$ in $(\mathbf{Top} \mid +)$. Diese Zuordnung ist funktoriell, und wir haben sie gleichfalls durch G bezeichnet. Analoges gilt für S .

Kubischer Formalismus

1. Kubische Mengen

1.1. Kubische und \perp -kubische Mengen. Die Kategorie $\underline{\Delta}$ ist die Kategorie der endlichen, nicht leeren, vollständig geordneten Mengen (modulo Isomorphie). Sei $\underline{\Delta}^+$ die Kategorie der endlichen, vollständig geordneten Mengen (modulo Isomorphie). Die Objekte von $\underline{\Delta}^+$ sind die Objekte aus $\underline{\Delta}$ mit der Hinzunahme des Objektes \emptyset . Wir schreiben $\underline{-1}$ für \emptyset .

Sie sind Unterkategorien der Kategorie aller endlichen, (partiell) geordneten Mengen.

Für zwei geordnete Mengen (A, \leq) und (B, \leq) ist das kartesische Produkt definiert durch: $(A, \leq) \times (B, \leq) := (A \times B, \leq)$, wobei $(a, b) \leq (a', b')$ in $A \times B$ genau dann, wenn $a \leq a'$ in A und $b \leq b'$ in B .

Wir beschreiben nun eine andere Unterkategorie, die Kategorie $\underline{\square}$. Objekte dieser Kategorie sind

$$\underline{n} = \{0 < 1\}^{\times n} = \{0 < 1\}^{\underline{n-1}}.$$

Der Exponent $\times n$ steht in der ersten Schreibweise für das iterierte kartesische Produkt von geordneten Mengen. Dieses kann mit der geordneten Menge der Funktionen von einer n -elementigen Menge nach $\{0 < 1\}$ identifiziert werden, wie es die zweite Schreibweise verdeutlicht. Ist insbesondere $n = 0$ so hat $\underline{0}$ ein Element, das dem einzigen Morphismus $\emptyset \rightarrow \{0, 1\}$ entspricht.

Wir beschreiben nun die Morphismen der Kategorie $\underline{\square}$.

Die Menge $[0, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvex. Wir nennen sie den n -dimensionalen Standardwürfel (oder n -Standardwürfel oder einfach n -dimensionalen Würfel).

Die Elemente von \underline{n} entsprechen den Extrempunkten $\{0, 1\}^n$ des n -dimensionalen Würfels $[0, 1]^n =: \square_n$ durch das kartesische Produkt der kanonischen Einbettung $\{0, 1\} \subseteq [0, 1]$. Diese Punkte werden auch Ecken genannt. Wir identifizieren auf diese Art und Weise die Elemente von \underline{n} mit den Ecken von $[0, 1]^n$.

Sei e_1, e_2, \dots, e_n die kanonische Basis von \mathbb{R}^n . Diese Elemente befinden sich in $[0, 1]^n$ und durch die Identifizierung auch in \underline{n} .

Sei $g : \{0, e_1, e_2, \dots, e_m\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beliebige Abbildung in **Ens**. Diese hat eine eindeutige affine Erweiterung $\tilde{g} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch:

$$(17) \quad \tilde{g}(0 + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m) := g(0) + \alpha_1 g(e_1) + \dots + \alpha_m g(e_m),$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

FRAGE 1.1. Unter welcher Bedingung bildet \tilde{g} \underline{m} auf \underline{n} ab?

Gilt $g(\underline{m}) \subseteq \underline{n}$, so gilt auch $g([0, 1]^m) \subseteq [0, 1]^n$.

Sei $T = T_n := \{1, 2, \dots, n\}$ die totale Indexmenge der Koordinaten aus \mathbb{R}^n . Lineare Kombinationen der Basisvektoren aus \mathbb{R}^n mit Koeffizienten 0 oder 1 bezeichnen wir wie folgt:

$$e_K := \sum_{k \in K} e_k \quad \text{für } K \subseteq T.$$

Insbesondere gilt $e_\emptyset = 0$ mit der Konvention, daß die Summe nach einer leeren Indexmenge zum neutralen Element 0 gleich ist.

Seien nun $I; J_1, \dots, J_n$ die eindeutig bestimmten Untermengen von T mit:

$$g(0) = e_I \in \mathbb{R}^n \quad \text{bzw.} \quad g(e_k) = e_{J_k} \quad \text{für } j = 1, \dots, m.$$

Die gesuchte Bedingung ist, daß die Untermengen $I; J_1, \dots, J_n$ von T paarweise disjunkt sind. Wir lassen zu, daß unter diesen Untermengen auch die leere Menge vorkommt.

NOTATION 1.2. Wir bezeichnen die Restriktion von \tilde{g} als Abbildung $\underline{m} \rightarrow \underline{n}$ durch

$$(18) \quad (I || J_1 | J_2 | \dots | J_m).$$

DEFINITION 1.3. Die Menge $\text{Hom}_{\square}(\underline{m}, \underline{n})$ der Morphismen zwischen \underline{m} und \underline{n} in \square ist die Menge aller Morphismen der Form (18).

Für $h : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ in \square bezeichnen wir durch $h_{\square} : \square_m \rightarrow \square_n$ die induzierte Abbildung.

1.2. Injektive Abbildungen. Injektive Abbildungen $h : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ induzieren injektive Abbildungen $h_{\square} : \square_m \rightarrow \square_n$. Wir untersuchen explizit den Fall $m = n - 1$. Dann ist h_{\square} (bis auf Permutation der Variablen)

- entweder eine Abbildung der Form $[0, 1]^{n-1} \rightarrow [0, 1]^{j-1} \times \{a\} \times [0, 1]^{j'} \rightarrow [0, 1]^n$ mit $j + j' = n$ und $a \in \{0, 1\}$.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} c_0^j &:= (\emptyset | 1|2| \dots | j-1|j+1| \dots | n) \\ c_1^j &:= (j | 1|2| \dots | j-1|j+1| \dots | n) . \end{aligned}$$

Generell werden wir wie oben bei expliziter Angabe der Elemente die Mengenklammer $\{ \}$ im inneren eines Symbol der Form $(\cdot | \cdot | \cdot | \dots | \cdot)$ nicht mehr vermerken.

- oder eine diagonale Einbettung:

$$d^{j,k} := (\emptyset | 1|2| \dots | j-1|j,k|j+1| \dots | \check{k}| \dots | n) \quad \text{für } j \neq k .$$

In der obigen Notation steht \check{k} dafür, daß diese Komponente entfällt.

1.3. Surjektive Abbildungen. Surjektive Abbildungen $h : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ induzieren surjektive Abbildungen $h_{\square} : \square_m \rightarrow \square_n$. Wir untersuchen explizit den Fall $m = n + 1$. Dann ist h_{\square} (bis auf Permutation der Variablen) die Abbildung $[0, 1]^{n+1} \rightarrow [0, 1]^n$ gegeben durch die Streichung der j -ten Komponente: $(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow (x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1})$. Wir schreiben dafür

$$\sigma^j := (\emptyset | 1|2| \dots | j-1|\emptyset|j| \dots | n) .$$

DEFINITION 1.4. Die Kategorie \square^{\perp} ist die Unterkategorie von \square mit den gleichen Objekten und mit Morphismen aus \square der Form

$$(I | J_1 | \dots | J_m) ,$$

so daß die J -Komponenten leer sind oder ein Element haben.

Insbesondere sind c_a^j und σ^j Morphismen in \square^{\perp} .

Analog zur Definition einer simplizialen Menge führen wir die Definition einer $(\perp-)$ kubischen Menge ein:

DEFINITION 1.5. Eine **kubische Menge** (bzw. eine \perp -kubischen Menge) ist ein Funktor:

$$F : \square^{opp} \longrightarrow \mathbf{Ens} \text{ respektive } F^{\perp} : (\square^{\perp})^{opp} \longrightarrow \mathbf{Ens} .$$

Wir bezeichnen durch **CubeEns** (bzw. **Cube $^{\perp}$ Ens**) die Kategorie der $(\perp-)$ kubischen Mengen. Sei $K \in \text{Ob } \mathbf{CubeEns}$. Elemente von $K(\underline{n}) =: K_n$ heißen (kubische) $(n-)$ Simplizes.

Eine kubische Menge wird auch vollkubische Menge genannt. (Dieser Begriff stimmt nicht mit dem Begriff "kubische Menge" in der Literatur überein.)

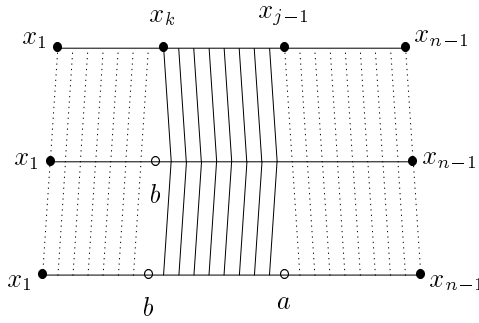
Man liest " \perp -kubische Menge" als "streng kubische Menge". (Eine streng kubische Menge ist das Objekt, das in der Literatur als "kubische Menge" bezeichnet wird.)

Parallel zu (1) können wir folgendes Resultat übertragen:

SATZ 1.6. Sowohl in der Kategorie \square^{\perp} als auch in der Kategorie \square gilt $c_a^j c_b^k = c_b^k c_a^{j-1}$. Dabei sind $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $k < j$ und $a, b \in \{0, 1\}$. In präziser Notation:

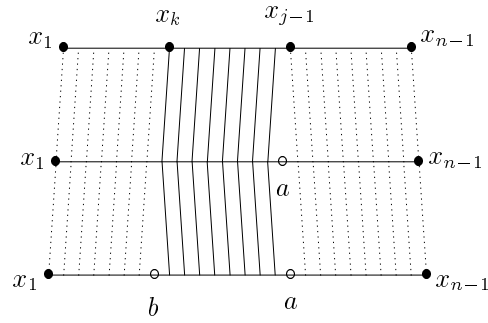
$$\left[\underline{n+1} \xleftarrow{c_a^j} \underline{n} \xleftarrow{c_b^k} \underline{n-1} \right] = \left[\underline{n+1} \xleftarrow{c_b^k} \underline{n} \xleftarrow{c_a^{j-1}} \underline{n-1} \right] .$$

BEWEIS: Die Skizze für die Gleichheit $c_{a,\square}^j c_{b,\square}^k = c_{b,\square}^k c_{a,\square}^{j-1}$ ist folgende:



$$\begin{aligned}
 & (x_1, \dots, x_k, \dots, x_{j-1}, \dots, x_{n-1}) \\
 & \quad \downarrow \\
 & (x_1, \dots, b, x_k, \dots, x_{j-1}, \dots, x_{n-1}) \\
 & \quad \downarrow \\
 & (x_1, \dots, b, x_k, \dots, a, x_{j-1}, \dots, x_{n-1})
 \end{aligned}$$

Skizze für $(c_a^j c_b^k)_\square$.



$$\begin{aligned}
 & (x_1, \dots, x_k, \dots, x_{j-1}, \dots, x_{n-1}) \\
 & \quad \downarrow \\
 & (x_1, \dots, x_k, \dots, a, x_{j-1}, \dots, x_{n-1}) \\
 & \quad \downarrow \\
 & (x_1, \dots, b, x_k, \dots, a, x_{j-1}, \dots, x_{n-1})
 \end{aligned}$$

Skizze für $(c_b^k c_a^{j-1})_\square$.

Dabei haben wir die Komponenten x_1, x_2, \dots eines Vektors aus \mathbb{R}^{n-1} , \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^{n+1} vermerkt.

□

1.4. $[0, 1]$ als kubische Menge. Sei $\gamma[\underline{n}]$ die kubische Menge $\mathbf{Hom}_\square(\cdot, \underline{n}) : \square^\perp \rightarrow \mathbf{Ens}$. Das Analogon von $[0, 1]$ ist die kubische Menge $\gamma[\underline{1}]$:

$$\begin{aligned}
 \gamma[\underline{1}]_k &= \{ (I | J_1 | \dots | J_k) \text{ mit } I \sqcup J_1 \sqcup \dots \sqcup J_k \subseteq \{1\} \} \\
 &= \{ (\emptyset | \emptyset | \dots | \emptyset), (1 | \emptyset | \dots | \emptyset), (\emptyset | 1 | \emptyset | \dots | \emptyset), \dots, (\emptyset | \emptyset | \dots | \emptyset | 1) \}
 \end{aligned}$$

Die Abbildungen $(\emptyset | \emptyset | \dots | \emptyset)$ und $(1 | \emptyset | \dots | \emptyset)$ faktorisieren über $\underline{0}$ und entsprechen den Abbildungen zwischen CW-Komplexen $\{0\} \rightarrow [0, 1]$ und $\{1\} \rightarrow [0, 1]$. Allgemein entspricht $\gamma[\underline{n}]$ zu $[0, 1]^n$.

1.5. Das kartesische Produkt. Das kartesische Produkt von kubischen Mengen ist die Abbildung $\times : \mathbf{CubeEns} \times \mathbf{CubeEns} \rightarrow \mathbf{CubeEns}$, welche zu einem Paar von kubischen Mengen (K, L) die natürliche Verknüpfung

$$\square^{opp} \xrightarrow{\text{diag}} \square^{opp} \times \square^{opp} \xrightarrow{K \times L} \mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens} \xrightarrow{\times} \mathbf{Ens} \text{ zuordnet. Explizit:}$$

$$(K \times L)_n := K_n \times L_n \text{ und } (K \times L)(f) := K(f) \times L(f), \quad \text{für } \underline{n} \in \text{Ob } \square, f \in \text{Arr } \square$$

DEFINITION 1.7. Zwei Morphismen f und g aus $\mathbf{CubeEns}[K \rightarrow L]$ bzw. $\mathbf{CubeEns}[K \rightarrow L]$ sind **homotopisch** (oder *homotop*) – in Notation $f \cong g$ –, falls es einen Morphismus (Homotopie) in der entsprechenden Kategorie gibt:

$$\begin{aligned}
 & F : K \times \gamma[\underline{1}] \rightarrow L \text{ mit} \\
 & F(x \times (\emptyset | \emptyset | \dots | \emptyset)) = f(x) \text{ und } F(x \times (1 | \emptyset | \dots | \emptyset)) = g(x)
 \end{aligned}$$

Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$(19) \quad \gamma[\underline{m+n}] \cong \gamma[\underline{m}] \times \gamma[\underline{n}].$$

Die Identität $\text{id}_n := \text{id}_{\underline{n}}$ befindet sich in $\gamma[\underline{n}]_n$ und erzeugt $\gamma[\underline{n}]$ (Yoneda). Wir können $\underline{m+n}$ mit dem mengentheoretischen kartesischen Produkt $\underline{m} \times \underline{n}$ identifizieren. Seien

$$\begin{aligned}
 \text{pr}_1 &= (\emptyset | 1 | 2 | \dots | m | \emptyset | \dots | \emptyset) \in \text{Hom}(\underline{m+n}, \underline{m}) = \gamma[\underline{m}]_{m+n}, \\
 \text{pr}_2 &= (\emptyset | \emptyset | \dots | \emptyset | 1 | 2 | \dots | n) \in \text{Hom}(\underline{m+n}, \underline{n}) = \gamma[\underline{n}]_{m+n},
 \end{aligned}$$

die entsprechenden Projektionen. Der $(m+n)$ -Simplex $(\text{pr}_1, \text{pr}_2)$ erzeugt $\gamma[\underline{m}] \times \gamma[\underline{n}]$, denn zu einem beliebigen Simplex (ξ, η) in dieser kubischen Menge, $\xi : \underline{k} \rightarrow \underline{m}$ und $\eta : \underline{k} \rightarrow \underline{n}$, für die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned}
 \xi \times \eta : \underline{k} &\longrightarrow \underline{m} \times \underline{n} \cong \underline{m+n} \\
 x &\longrightarrow (\xi(x), \eta(x))
 \end{aligned}$$

gilt $(\xi \times \eta)^*(pr_1, pr_2) = ((\xi \times \eta)^*pr_1, (\xi \times \eta)^*pr_2) = (\xi, \eta)$.

Der Isomorphismus (19) entsteht, indem die erzeugenden $(m+n)$ -Simplizes id_{n+m} und (pr_1, pr_2) ineinander überführt werden.

1.6. Zusätzliche Struktur auf einer \perp -kubischen Menge. Wir arbeiten in diesem Abschnitt in der Kategorie \square^\perp und betrachten nur \perp -kubische Mengen.

In der Kategorie \square^\perp gilt:

$$\begin{aligned} c_a^j c_b^k &= c_c^k c_a^{j-1} && \text{für } k < j \\ \sigma^k c_a^j &= \begin{cases} c_a^{j-1} \sigma^k & \text{falls } k < j \\ \text{Identität} & \text{falls } k = j \\ c_a^j \sigma^{k-1} & \text{falls } k > j \end{cases} \\ \sigma^j \sigma^k &= \sigma^k \sigma^{j+1} && \text{für } k \leq j. \end{aligned}$$

Sei K eine \perp -kubische Menge. Wir führen die Standard-Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \partial_j^a &:= K(c_a^j : \underline{n-1} \rightarrow \underline{n}) && : K_{n-1} \leftarrow K_n && i = 1, 2, \dots, n; a = 0, 1 \\ \epsilon_j &:= K(\sigma^j : \underline{n+1} \rightarrow \underline{n}) && : K_{n+1} \leftarrow K_n && i = 1, 2, \dots, (n+1) \end{aligned}$$

Wir werden nun eine äquivalente Definition einer \perp -kubischen Menge geben und in diesem Rahmen zusätzlich Struktur einführen:

DEFINITION 1.8 ([BH1], S.235). Eine \perp -**kubische Menge** ist eine Familie von Mengen K_n , $n = 0, 1, \dots$ mit Abbildungen

$\partial_j^a : K_n \rightarrow K_{n-1}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $a = 0, 1$, genannt *Ränder*, und
 $\epsilon_j : K_n \rightarrow K_{n+1}$, $j = 1, 2, \dots, n+1$, genannt *Ausartungen*, so daß folgende Gleichheiten stattfinden:

$$\begin{aligned} \partial_i^a \partial_j^b &= \partial_{j-1}^b \partial_i^a && \text{für } i < j \\ \partial_i^a \epsilon_j &= \begin{cases} \epsilon_{j-1} \partial_i^a & \text{falls } i < j \\ \text{Identität} & \text{falls } i = j \\ \epsilon_j \partial_{i-1}^a & \text{falls } i > j \end{cases} \\ \epsilon_i \epsilon_j &= \epsilon_{j+1} \epsilon_i && \text{für } i \leq j \end{aligned}$$

Eine \perp -**kubische Menge mit Verbindungen** (connections) ist eine \perp -kubische Menge $(K_n, \partial_j^a, \epsilon_j)_n$ mit zusätzlichen Ausartungen $,_j : K_{n-1} \rightarrow K_n$, $j = 1, \dots, n-1$, genannt *Verbindungen*, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \partial_{j,j}^1 &= \partial_{j+1}^1, \, ,_j = \epsilon_j \partial_j^1, && ,_i, \, ,_j = ,_{j+1}, \, ,_i && \text{für } i \leq j, \\ \partial_{j,j}^0 &= \partial_{j+1}^0, \, ,_j = \text{Identität}, && ,_j \epsilon_j &= \epsilon_j \epsilon_j = \epsilon_{j+1} \epsilon_j, \\ \partial_{i,j}^a &= \begin{cases} ,_{j-1} \partial_i^a & \text{falls } i < j, \\ ,_j \partial_{i-1}^a & \text{falls } i > j+1. \end{cases} && ,_j \epsilon_j &= \begin{cases} \epsilon_{j+1}, \, ,_i & \text{falls } i < j, \\ \epsilon_j, \, ,_{i-1} & \text{falls } i > j. \end{cases} \end{aligned}$$

Eine \perp -**kubische Menge mit Verbindungen und Verknüpfungen** ist eine \perp -kubische Menge mit Verbindungen $(K_n, \partial_j^a, \epsilon_j, ,_j)_n$, versehen mit je einer Gruppoid-Struktur $(K_n, +_j, -_j)$ für jede Richtung $j = 1, \dots, n$:

$+_j : K_n \times K_n \rightsquigarrow K_n$ ist partiell definiert. (D.h. $x +_j y$ ist für $x, y \in K_n$ entweder nicht definiert, oder definiert, und das Ergebnis ist ein Element aus K_n . Relationen, welche die Operationen $+_j$ beinhalten, nennen wir wohldefiniert, falls keine nicht definierten Ausdrücke entstehen.) Für $x, y \in K_n$ ist $x +_j y$ genau dann definiert, wenn $\partial_j^1 x = \partial_j^0 y$.

$-_j : K_n \rightarrow K_n$ ist immer definiert.

Die Verträglichkeit der Verknüpfungen $(+_j, -_j)$ unter sich und mit der zugrundeliegenden Struktur gilt als Teil der Definition wie folgt:

• $+_j$ und $-_j$ induzieren auf K_n eine Gruppoidstruktur: Wenn beide Seiten in den folgenden Relationen wohldefiniert sind, gilt:

$$-_j(x +_j y) = (-_j x) +_j (-_j y) \qquad -_j(-_j x) = x$$

- *Verträglichkeit zwischen $+_j$ und Ausartungen:* Wenn beide Seiten in den folgenden Relationen wohldefiniert sind, gilt:

$$\begin{aligned}\partial_j^0(x +_j y) &= \partial_j^0 x \\ \partial_j^1(x +_j y) &= \partial_j^1 y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_i^a(x +_j y) &= \partial_i^a x +_{j-1} \partial_i^a y \quad \text{für } i < j \\ \partial_i^a(x +_j y) &= \partial_i^a x +_j \partial_i^a y \quad \text{für } i > j\end{aligned}$$

- *Verträglichkeit zwischen $-_j$ und Ausartungen:*

$$\begin{aligned}\partial_j^0(-_j x) &= \partial_j^1 x \\ \partial_j^1(-_j x) &= \partial_j^0 x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_i^a(-_j x) &= -_{j-1} \partial_i^a x \quad \text{für } i < j \\ \partial_i^a(-_j x) &= -_j \partial_i^a x \quad \text{für } i > j\end{aligned}$$

- *Verträglichkeit zwischen $+_i$ und $+_j$ für $i \neq j$:* Wenn beide Seiten in den folgenden Relationen wohldefiniert sind, gilt:

$$(x +_i y) +_j (z +_i t) = (x +_j z) +_i (y +_j t)$$

$$\text{Notation dafür: } \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \xrightarrow{j}^i$$

- *Verträglichkeit zwischen $-_i$ und $+_j$ für $i \neq j$:* Wenn beide Seiten in den folgenden Relationen wohldefiniert sind, gilt:

$$-_i(x +_j y) = (-_i x) +_j (-_i y)$$

$$-_i(-_j x) = -_j(-_i x)$$

- *Verträglichkeit zwischen $+_j, -_j$ und Ausartungen:* Wenn beide Seiten in den folgenden Relationen wohldefiniert sind, gilt:

$$\epsilon_i(x +_j y) = \begin{cases} \epsilon_i x +_{j+1} \epsilon_i y & \text{falls } i \leq j, \\ \epsilon_i x +_j \epsilon_i y & \text{falls } i > j. \end{cases} \quad \epsilon_i(-_j x) = \begin{cases} -_{j+1} \epsilon_i x & \text{falls } i \leq j, \\ -_j \epsilon_i x & \text{falls } i > j. \end{cases}$$

- *Verträglichkeit zwischen $+_j, -_j$ und Verbindungen:* Wenn beide Seiten in den folgenden Relationen wohldefiniert sind, gilt:

$$\begin{aligned},_i(x +_j y) &= \begin{cases} ,_i x +_{j+1} ,_i y & \text{falls } i < j, \\ ,_i x +_j ,_i y & \text{falls } i > j, \end{cases} \quad ,_j(x +_j y) = \begin{bmatrix} ,_j x & \epsilon_j y \\ \epsilon_{j+1} y & ,_j y \end{bmatrix} \\ ,_i(-_j x) &= \begin{cases} -_{j+1} ,_i x & \text{falls } i < j, \\ -_j ,_i x & \text{falls } i > j, \end{cases}\end{aligned}$$

Das Standardbeispiel einer \perp -kubischen Menge, versehen mit einer solchen reichen Struktur, wird nach der Einführung der kubischen Menge der kubischen Simplizes eines topologischen Raumes im Unterabschnitt 1.8.3 erläutert.

1.7. Die Homologie. Durch Verknüpfung mit dem Funktor $\mathbb{Z}[\cdot] : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ab}$ entstehen Funktoren, die auch mit $\mathbb{Z}[\cdot]$ bezeichnet werden:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CubeEns} \rightarrow \mathbf{CubeAb} & \text{und} & \mathbf{Cube}^\perp \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Cube}^\perp \mathbf{Ab} \\ K \rightarrow \mathbb{Z}[K] & & K^\perp \rightarrow \mathbb{Z}[K^\perp] \end{array}$$

DEFINITION 1.9 (Der Funktor $\mathbf{Cube}^\perp \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{DGA b}$). Sei $K \in \mathbf{Cube}^\perp \mathbf{Ab}$. Der Komplex (K^\cdot, ∂) ist erklärt durch folgende Daten:

- Der Anteil im Grad n ist $K^n := K(\underline{n})$.
- Wir bezeichnen durch ∂_j^a die Abbildung $K(c_a^j) : K^{n-1} \leftarrow K^n$ und seien $\partial_j := \partial_j^1 - \partial_j^0$ und

$$\partial := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \partial_i : K^{n-1} \leftarrow K^n.$$

Sukzessive erhalten wir folgende Gleichheiten:

$$\begin{aligned}
c_a^j c_b^k &= c_b^k c_a^{j-1} & : \quad \underline{n-1} &\longrightarrow \underline{n+1} \\
K(c_b^k)K(c_a^j) &= K(c_a^{j-1})K(c_b^k) & : K(\underline{n-1}) &\longleftarrow K(\underline{n+1}) \\
\partial_k^b \partial_j^a &= \partial_{j-1}^a \partial_k^b & : \mathbb{Z}_{n-1}[K] &\longleftarrow \mathbb{Z}_{n+1}[K] \\
\partial_k \partial_j &= \sum_{a,b} (-1)^{a+b} \partial_k^b \partial_j^a = \sum_{a,b} (-1)^{a+b} \partial_{j-1}^a \partial_k^b = \partial_{j-1} \partial_k
\end{aligned}$$

Das Standard-Argument ergibt $\partial\partial = 0$. Wir nehmen ∂ als das Differential des Komplexes (K^\cdot, ∂) . Diese objektweise definierte Zuordnung läßt sich natürlich zu einem Funktor erweitern.

Durch Verknüpfung mit dem Vergiß-Funktor entsteht der Funktor $\mathbf{CubeAb} \rightarrow \mathbf{Cube}^\perp \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{DGA}b$. Wir bezeichnen den Funktor

$$\mathbf{CubeEns} \rightarrow \mathbf{CubeAb} \rightarrow \mathbf{DGA}b \quad \text{durch} \quad K \longrightarrow (\mathbb{Z}[K], \partial) .$$

DEFINITION 1.10. Die **volle Homologie** von $(\perp-)$ kubischen Mengen ist der Funktor

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{CubeEns} & \xrightarrow{!} & \mathbf{Cube}^\perp \mathbf{Ens} & \xrightarrow{\mathbb{Z}[\cdot]} & \mathbf{DGA}b \xrightarrow{H} \mathbf{GA}b \\
& & \mathbf{Cube}^\perp \mathbf{Ens} & \xrightarrow{\mathbb{Z}[\cdot]} & \mathbf{DGA}b \xrightarrow{H} \mathbf{GA}b
\end{array} \quad \text{respektive}$$

Wir bezeichnen ihn durch VH .

DEFINITION 1.11. Sei K eine $(\perp-)$ kubische Menge. $K(\underline{n})^a$ ist definiert als die Menge aller Elemente $\eta \in K(\underline{n})$, für welche es einen Morphismus h in $\underline{\square}$ (resp. $\underline{\square}^\perp$) und ein Element η' wie folgt gibt:

$$\begin{array}{ccc}
\underline{n}' & \xleftarrow{h} & \underline{n} , \\
\eta' \in K(\underline{n}') & \xrightarrow{K(h)} & K(\underline{n}) , \\
\eta' & \longrightarrow & \eta = K(h)\eta' .
\end{array} \quad \text{wobei } n' < n \text{ ist,}$$

Elemente aus $K(\underline{n})^a$ heißen **ausgeartet**. Sei $K(\underline{n})^{na} := K(\underline{n}) \setminus K(\underline{n})^a$ die Menge der nicht ausgearteten Elemente. Wir definieren:

$$\mathbb{Z}^n[K]^{na} := \mathbb{Z}[K(\underline{n})^{na}] = \frac{\mathbb{Z}[K(\underline{n})]}{\mathbb{Z}[K(\underline{n})^a]} .$$

Das Differential $\partial : \mathbb{Z}^n[K] \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1}[K]$ bildet formale Summen von ausgearteten Elementen auf formale Summen von ausgearteten Elementen ab und induziert eine faktorisierende Abbildung $\mathbb{Z}^n[K]^{na} \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1}[K]^{na}$, die wir auch durch ∂ bezeichnen. Wir definieren $\mathbb{Z}[K]^{na}$ als den (Quotienten-)Komplex mit dem Anteil $\mathbb{Z}^n[K]^{na}$ im Grad n und mit dem Differential ∂ .

DEFINITION 1.12. Die **Homologie** von $(\perp-)$ kubischen Mengen ist der Funktor

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{CubeEns} & \xrightarrow{!} & \mathbf{Cube}^\perp \mathbf{Ens} & \xrightarrow{\mathbb{Z}[\cdot]^{na}} & \mathbf{DGA}b \xrightarrow{H} \mathbf{GA}b \\
& & \mathbf{Cube}^\perp \mathbf{Ens} & \xrightarrow{\mathbb{Z}[\cdot]^{na}} & \mathbf{DGA}b \xrightarrow{H} \mathbf{GA}b
\end{array} \quad \text{respektive}$$

Wir bezeichnen ihn auch durch H .

Die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}^n[K]^{na}$ ist direkter Summand in $\mathbb{Z}^n[K]$.

Durch Verknüpfung mit dem Vergiß-Funktor entsteht der Funktor $\mathbf{CubeAb} \rightarrow \mathbf{Cube}^\perp \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{DGA}b$. Wir bezeichnen den Funktor

$$\mathbf{CubeEns} \rightarrow \mathbf{CubeAb} \rightarrow \mathbf{DGA}b \quad \text{durch} \quad K \longrightarrow (\mathbb{Z}[K], \partial) .$$

1.8. Die Funktoren R und S .

1.8.1. *Die kubischen geometrischen Realisierungen R und R^\perp .* Analog zur Situation aus dem Abschnitt 1.5.1 führen wir die Funktoren R und R^\perp (– bezeichnet auch mit $\|\cdot\|$ resp. $\|\cdot\|^\perp$ –) ein:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CubeEns} & \xrightarrow{\|\cdot\|} & \mathbf{Top} \\ K & \longrightarrow & \|K\| \text{ oder } RK \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{CubeEns} & \xrightarrow{\|\cdot\|^\perp} & \mathbf{Top} \\ K & \longrightarrow & \|K\|^\perp \text{ oder } R^\perp K \end{array}$$

Der topologische Raum $\|K\|$ resp. $\|K\|^\perp$ zur kubischen Menge K ist:

$$\|K\| := \left(\prod_{n \geq 0} K(\underline{n}) \times \square_n \right) / \approx \quad \text{resp.} \quad \|K\|^\perp := \left(\prod_{n \geq 0} K(\underline{n}) \times \square_n \right) / \approx^\perp.$$

- Die Menge $K(\underline{n})$ wird als diskreter topologischer Raum aufgefaßt.
- Die Äquivalenzrelation \approx resp. \approx^\perp identifiziert zwei Punkte

$$\left(\kappa_i \in K(\underline{n}_i), x_i \in \square_{n_i} \right) \in \|K\| \text{ resp. } \|K\|^\perp, \quad \text{für } i = 1, 2$$

genau dann, wenn eine Abbildung $g: \underline{n}_1 \rightarrow \underline{n}_2$ in \square resp. \square^\perp existiert, so daß sich dadurch die Elemente κ_i und x_i entsprechen:

$$\begin{array}{ccc} K(\underline{n}_1) \ni \kappa_1 & \xleftarrow{K(g)} & \kappa_2 \in K(\underline{n}_2) \\ \square_{n_1} \ni x_1 & \xrightarrow{g_\square} & x_2 \in \square_{n_2} \end{array}$$

i.e. $(K(g)(\kappa_2), x_1) \approx (\kappa_2, g_\square(x_1))$.

1.8.2. *Der Funktor $S = S_\square$, der singuläre kubische Komplex.* Die Zuordnung $i: \square^\perp \rightarrow \mathbf{Top}$ gegeben auf Objekten durch $\underline{n} \rightarrow \square_n$ und auf Morphismen durch $f \rightarrow f_\square$, ist ein Funktor. (Unterabschnitt 1.1) Sei X in \mathbf{Top} . Die kontravariante Zusammensetzung

$$\square^\perp \xrightarrow{i} \mathbf{Top} \xrightarrow{\text{Hom}(\cdot, X)} \mathbf{Ens}$$

erklärt eine \perp -kubische Menge SX , den singulären kubischen Komplex zu X . Er ist ein KAN-Komplex. Für eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ in \mathbf{Top} sei $Sf := \text{Hom}(\cdot, f) \circ i: SX \rightarrow SY$. Es entsteht ein Funktor $S = S_\square$ von \mathbf{Top} in die Kategorie der \perp -kubischen Mengen mit der Extensionseigenschaft von KAN. Die Homologie mit \mathbb{Z} -Koeffizienten eines Raumes $X \in \text{Ob} \mathbf{Top}$ kann als die Homologie der \perp -kubischen Menge $\mathbb{Z}[S_\square X]$ berechnet werden. ([Se], [EMacL].)

1.8.3. *Zusätzliche Struktur auf $SX = S_\square X$.* Sei X ein topologischer Raum. Wir arbeiten in diesem Unterabschnitt nur mit dem Funktor S_\square und verwenden dafür die Notation S . Der Anteil $S_n X$ der kubischen Menge SX besteht aus stetigen Abbildungen $I^n \rightarrow X$. Die kanonische $-,$ -Struktur auf SX ist gegeben durch Abbildungen ${}_i: S_{n-1}X \rightarrow S_n X$, welche einer stetigen Abbildung $x = x(t_1, \dots, t_{n-1}): I^{n-1} \rightarrow X$ die Abbildung ${}_i x$ zuordnet:

$${}_i x(t_1, \dots, t_n) := x(t_1, \dots, t_{i-1}, \max(t_i, t_{i+1}), t_{i+2}, \dots, t_n).$$

Die Operationen $+_j$ und $-_j$ sind für geeignet gewählte stetige Abbildungen gegeben durch:

$$\begin{aligned} (x +_j y)(t_1, \dots, t_n) &:= \begin{cases} x(t_1, \dots, t_{j-1}, 2t_j, t_{j+1}, \dots, t_n) & \text{für } t_j \leq \frac{1}{2}, \\ y(t_1, \dots, t_{j-1}, 2t_j - 1, t_{j+1}, \dots, t_n) & \text{für } t_j \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \\ (-_j x)(t_1, \dots, t_n) &:= x(t_1, \dots, t_{j-1}, 1 - t_j, t_{j+1}, \dots, t_n) \end{aligned}$$

2. Die KS-Konstruktion, die KS[⊥]-Konstruktion und die richtige Linearisierung $\mathbb{Z}K(\cdot)$

2.1. **Kubische Diagramme.** Die Diagramm-Kategorie $\{0 < 1 < 2\}^{\times n}$ hat je ein initiales und ein finales Objekt. Diese sind verschieden. Wir identifizieren die Elemente der Menge $\{0, 1, 2\}^n$, Objekte dieser Kategorie, mit den Wörtern der Länge n aus dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$, um die Notation zu vereinfachen:

$$(20) \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) \rightsquigarrow a_n \dots a_2 a_1.$$

Insbesondere machen wir in Notationen Gebrauch von der Monoidstruktur, die durch das Hintereinanderschreiben von Wörtern entsteht.

Ähnlich zur Bildung von Wald_n wird ein Nullelement $\underline{0}$ adjungiert:

DEFINITION 2.1. Wir definieren $Cube_n$ für $n \geq 0$ als die Menge

$$Cube_n := \{\underline{0}\} \sqcup \{0 < 1 < 2\}^{\times n},$$

versehen mit der Relation \prec , gegeben durch $\underline{0} \prec \alpha \prec \underline{0}$ für $\alpha \in Cube_n$ und $\alpha \prec \beta$ für $\alpha, \beta \in \{0 < 1 < 2\}^{\times n}$ genau dann, wenn $\alpha \leq \beta$ gilt.

Wir führen in $Cube_n$ folgende zusätzliche Struktur ein:

- $\underline{0}$ ist das Nullobjekt.
- Verknüpfungen von Pfeilen der Form $a0b \rightarrow a1b$ oder $\underline{0} \rightarrow a$ sind die Monomorphismen.
- Verknüpfungen von Pfeilen der Form $a1b \rightarrow a2b$ oder $a \rightarrow \underline{0}$ sind die Epimorphismen.
- Identitäten sind die schwachen Äquivalenzen.
- Die exakten Sequenzen sind der Form:

$$\begin{aligned} \underline{0} &\longrightarrow a0b \longrightarrow a1b \longrightarrow a2b \longrightarrow \underline{0}, \\ \underline{0} &\longrightarrow a \xlongequal{\quad} a \longrightarrow \underline{0} \longrightarrow \underline{0}, \\ \underline{0} &\longrightarrow \underline{0} \longrightarrow a \xlongequal{\quad} a \longrightarrow \underline{0}. \end{aligned}$$

Mit a und b bezeichnen wir dabei beliebige Wörter geeigneter Länge. Die Kategorie $Cube_n$ ist so konstruiert, daß die exakten Morphismen von $Cube_n$ in eine exakte Kategorie \mathcal{A} mit den exakten Multikomplexen mit n Richtungen der Länge 3 zu identifizieren sind.

Die Kategorie $Cube_n$ ist keine WALDHAUSEN-Kategorie. (Genau die Monomorphismen der Form $a0b \rightarrow a1b$ haben einen formalen Kokern. Die anderen nicht. Um diese Struktur-Lücke zu füllen, kommt folgende)

DEFINITION 2.2. Wir definieren die Diagramm-Kategorie $FullCube_n$.

- Die Objekte dieser Kategorie sind: das Symbol $\underline{0}$ und die Bilder $\alpha(\underline{m})$ der (mengentheoretisch injektiven) Morphismen $\alpha : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ aus \square für $m \leq n$. Wir führen für solche Objekte eine alternative Notation ein:
- Jedes injektive $\alpha : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ aus \square läßt sich schreiben als:

$$(I||J_1|J_2|\dots|J_m)$$

wie in 1.2. Die Injektivität ist äquivalent dazu, daß die Mengen J_1, \dots, J_m nicht leer sind. Da injektive Abbildungen α mit gleichem Bild gleiche Objekte ergeben, ist die Reihenfolge der Untermengen J_k nicht mehr relevant.

- Wir führen die Notation ein:

$$\{I||J_1|J_2|\dots|J_m\},$$

um alle Symbole der Form $(I||J'_1|J'_2|\dots|J'_m)$ zu identifizieren, für welche gilt $\{J_1, J_2, \dots, J_m\} = \{J'_1, J'_2, \dots, J'_m\}$. Die Objekte der Kategorie $FullCube_n$ sind also:

das Symbol $\underline{0}$ und

$$\text{Symbole } \{I||J_1|J_2|\dots|J_m\}, \quad I; J_1, \dots, J_m \subseteq \{1, \dots, n\}, \quad J_1, \dots, J_m \neq \emptyset.$$

- Konvention: Enthält das Symbol $\{I||J_1|J_2|\dots|J_m\}$ eine leere J -Komponente, i.e. $J_k = \emptyset$ für ein $k = 1, \dots, m$, so ist es gleich zu $\underline{0}$.
- Wir definieren nun die Morphismen von $FullCube_n$. Diese Kategorie ist die Kategorie mit der kleinsten Anzahl von Morphismen, so daß $\underline{0}$ Nullobjekt ist, und folgende Morphismen existieren:

$$(21) \quad \{I||J_1|J_2|\dots|J_m\} \longrightarrow \{I'||J_1|J_2|\dots|J_m\}$$

$$(22) \quad \{I'||J_1|J_2|\dots|J_m\} \longrightarrow \{I||J_1|J_2|\dots|J_m|I' \setminus I\},$$

wobei I eine echte Untermenge von I' ist, und alle Symbole in (21) und (22) Objekte von $FullCube_n$ sind. Wir versehen die Kategorie $FullCube_n$ mit zusätzlicher Struktur:

- $\underline{0}$ ist das Nullobjekt von $FullCube_n$.
- Verknüpfungen von Pfeilen der Form (21) oder $\underline{0} \rightarrow X$ sind die Monomorphismen.
- Verknüpfungen von Pfeilen der Form (22) oder $X \rightarrow \underline{0}$ sind die Epimorphismen.
- Identitäten sind die schwachen Äquivalenzen.

• Die exakten Sequenzen sind der Form:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{0}} &\longrightarrow \{I || J_1 | \dots | J_m\} \longrightarrow \{I' || J_1 | \dots | J_m\} \longrightarrow \{I || J_1 | \dots | J_m | I' \setminus I\} \longrightarrow \underline{\mathbf{0}}, \\ \underline{\mathbf{0}} &\longrightarrow X \xlongequal{\quad} X \xrightarrow{\quad} \underline{\mathbf{0}} \longrightarrow \underline{\mathbf{0}}, \\ \underline{\mathbf{0}} &\longrightarrow \underline{\mathbf{0}} \longrightarrow X \xlongequal{\quad} X \longrightarrow \underline{\mathbf{0}}. \end{aligned}$$

DEFINITION 2.3. Die Kategorie **FullCube** (bzw. **Cube**) ist die Kategorie mit den Objekten FullCube_n (bzw. mit den Objekten Cube_n) und mit solchen Funktoren als Morphismen, die verträglich mit der zusätzlichen Struktur auf diesen Objekten sind. Solche Funktoren heißen *exakt*.

Folgende Zuordnung definiert einen Funktor:

$$\begin{aligned} \square &\longrightarrow \mathbf{FullCube}, \\ \text{Auf Objekten: } \underline{n} &\longrightarrow \text{FullCube}_n, \\ \text{Auf Morphismen: } \begin{bmatrix} \underline{n} \\ h \downarrow \\ \underline{n'} \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} \text{FullCube}_n \\ h_* \downarrow \\ \text{FullCube}_{n'} \end{bmatrix} \text{ gegeben durch } \begin{array}{ccc} \alpha(\underline{m}) & & \alpha(\underline{m}) \\ \downarrow & \text{oder} & \downarrow \\ \alpha'(\underline{m'}) & & \underline{\mathbf{0}} \end{array}. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile sind α' und m' bestimmt durch die eindeutige Faktorisierung der Abbildung $h\alpha : \underline{m} \rightarrow \underline{n'}$ über $\underline{m'}$ mit injektivem α' und surjektivem h' :

$$\begin{array}{ccc} \underline{m} & \xrightarrow{\alpha} & \underline{n} \\ h' \downarrow & & \downarrow h \\ \underline{m'} & \xrightarrow{\alpha'} & \underline{n'} \end{array}$$

Ist $m' < m$ so definieren wir $h_*[\alpha(\underline{m})] := \underline{\mathbf{0}}$. Ist $m = m'$ so definieren wir $h_*[\alpha(\underline{m})] := \alpha'(\underline{m'})$. Sei auch per Definition $h_*(\underline{\mathbf{0}}) := \underline{\mathbf{0}}$.

Die Funktorialität $(hg)_* = h_*g_*$ folgt aus der Eindeutigkeit der Faktorisierung. In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \underline{m} & \xrightarrow{\alpha} & \underline{n} & & \\ & \searrow g' & & \searrow g & \\ & & \underline{m'} & \xrightarrow{\alpha'} & \underline{n'} \\ & \swarrow h' & & \swarrow h & \\ \underline{m''} & \xrightarrow{\alpha''} & \underline{n''} & & \end{array}$$

faktorisieren wir zuerst $g\alpha$ und bekommen eindeutig die Morphismen α' injektiv und g' surjektiv, und dann $h\alpha'$ und bekommen eindeutig die Morphismen α'' injektiv und h' surjektiv. $(hg)\alpha$ läßt sich schreiben als $\alpha''(h'g')$ mit α'' injektiv und $(h'g')$ surjektiv. Nach Konstruktion gilt:

$$(hg)_*[\alpha(\underline{m})] = \alpha''(\underline{m''}) = h_*[\alpha'(\underline{m'})] = h_*g_*[\alpha(\underline{m})],$$

falls $m = m' = m''$. In dem Fall $m'' < m$ stimmen $(hg)_*[\alpha(\underline{m})]$ und $h_*g_*[\alpha(\underline{m})]$ mit $\underline{\mathbf{0}}$ überein. Es folgt $(hg)_* = h_*g_*$.

Es bleibt zu prüfen, daß h_* verträglich mit der zusätzlichen Struktur ist. Für eine Abbildung $h : \underline{n} \rightarrow \underline{n'} \in \square$ seien T und T' die Indexmengen $\{1, \dots, n\}$ bzw. $\{1, \dots, n'\}$, und seien $I_0^*, J_1^*, \dots, J_n^* \subseteq T'$ möglicherweise leer mit:

$$\begin{array}{ccc} \underline{n} & [0, 1]^n & \ni \quad 0 \quad e_j \\ h \downarrow & h_* \downarrow & \downarrow \quad \downarrow \\ \underline{n'} & [0, 1]^{n'} & \ni \quad e_{I_0^*} \quad e_{J_j^*} \text{ für } j \in T. \end{array}$$

Sei $\eta := \{I || J_1 | \dots | J_m\} \in \text{FullCube}_n$. Seien

$$I_1^* := \bigsqcup_{i \in I} J_i^*, \quad I' := I_0^* \sqcup I_1^*, \quad \text{und } J'_k := \bigsqcup_{j \in J_k} J_j^*, \text{ für } k \in \{1, \dots, m\}.$$

Ist eine der Mengen J'_k leer, so gilt nach Konstruktion $h_*(\eta) = \underline{0}$. Sonst gilt $h_*(\eta) = \{I' || J'_1 | \dots | J'_m\} \in \text{FullCube}_{n'}$. Man prüft nun leicht nach, daß Mono- und Epimorphismen und exakte Sequenzen auf Entsprechendes abgebildet werden.

SATZ 2.4. Sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in \text{Ob Cube}_n$. Sei $I := \{i \mid a_i = 1\}$. Sei m die Anzahl der Einträge in a , die gleich 2 sind. Seien J_1, J_2, \dots, J_m einelementig, so daß $J_1 \sqcup J_2 \sqcup \dots \sqcup J_m = \{j \mid a_j = 2\}$. Die Zuordnung der Objekte

$$a \longrightarrow \{I || J_1 | J_2 | \dots | J_m\}$$

läßt sich eindeutig zu einem Einbettungsfunktor $\text{Cube}_n \rightarrow \text{FullCube}_n$ vervollständigen, der verträglich mit der zusätzlichen Struktur ist.

□

2.2. Die KS.-Konstruktion und die KS^\perp -Konstruktion.

DEFINITION 2.5. Sei \mathcal{C} eine exakte Kategorie. Die kubische Menge $\text{KS}\mathcal{C}$ ist definiert als Verknüpfung der Funktoren

$$\square \longrightarrow \text{FullCube} \xrightarrow{\text{Hom}_{ex}(\cdot, \mathcal{C})} \text{Ens}$$

Wir erklären 2.5:

Auf Objekten ist $\text{KS}\mathcal{C}$ gegeben durch $\text{KS}\mathcal{C}(\underline{n}) := \text{Hom}_{ex}(\text{FullCube}_n, \mathcal{C})$, und auf Morphismen durch:

$$\begin{array}{ccc} \underline{n} & \xrightarrow{h} & \underline{n}' \\ \text{FullCube}_n & \xrightarrow{h_*} & \text{FullCube}_{n'} \\ \text{Hom}_{ex}(\text{FullCube}_n, \mathcal{C}) & \xleftarrow{\text{Hom}_{ex}(h_*, \mathcal{C})} & \text{Hom}_{ex}(\text{FullCube}_{n'}, \mathcal{C}) \\ \text{KS}\mathcal{C}(\underline{n}) & \xleftarrow{\text{KS}\mathcal{C}(h)} & \text{KS}\mathcal{C}(\underline{n}'). \end{array} \quad \text{in } \square \text{ induziert}$$

bezeichnet durch:

DEFINITION 2.6. Sei \mathcal{C} eine exakte Kategorie. Die \perp -kubische Menge $\text{KS}^\perp\mathcal{C}$ ist definiert als Verknüpfung der Funktoren

$$\square^\perp \longrightarrow \text{Cube} \xrightarrow{\text{Hom}_{ex}(\cdot, \mathcal{C})} \text{Ens}$$

Alle Einbettungen $\text{Cube}_n \rightarrow \text{FullCube}_n$ liefern eine natürliche Zuordnung $\text{KS}\mathcal{C} \rightarrow \text{KS}^\perp\mathcal{C}$.

BEMERKUNG 2.7. Die Elemente von $\text{KS}^\perp\mathcal{C}(\underline{n})$ können mit Diagrammen der Form

$$(23) \quad \begin{array}{ccccccc} E_{0\dots 00} & \dashrightarrow & E_{0\dots 01} & \longrightarrow & E_{0\dots 02} & & \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & E_{1\dots 00} & \dashrightarrow & E_{1\dots 01} & \longrightarrow & E_{1\dots 02} & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & E_{2\dots 00} & \dashrightarrow & E_{2\dots 01} & \longrightarrow & E_{2\dots 02} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ E_{0\dots 10} & \dashrightarrow & E_{0\dots 11} & \longrightarrow & E_{0\dots 12} & & \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & E_{1\dots 10} & \dashrightarrow & E_{1\dots 11} & \longrightarrow & E_{1\dots 12} & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & E_{2\dots 10} & \dashrightarrow & E_{2\dots 11} & \longrightarrow & E_{2\dots 12} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ E_{0\dots 20} & \dashrightarrow & E_{0\dots 21} & \longrightarrow & E_{0\dots 22} & & \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & E_{1\dots 20} & \dashrightarrow & E_{1\dots 21} & \longrightarrow & E_{1\dots 22} & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & E_{2\dots 20} & \dashrightarrow & E_{2\dots 21} & \longrightarrow & E_{2\dots 22} \end{array}$$

identifiziert werden. Dabei haben wir nur drei Richtungen gezeichnet. Die Sequenzen der Form $\cdot \dashrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot$ und $\cdot \dashrightarrow \cdot \dashrightarrow \cdot$ sind kurz exakt.

Die Diagramme zu den Elementen von $\mathbf{KS.C}(\underline{n})$ sind umfangreicher. Sie entstehen durch die Aufnahme von Quotienten von Verknüpfungen zu allen Monomorphismen in einem Diagramm der Form (23).

Beispiele:

- Für $n = 2$ beinhaltet ein Element E aus $\mathbf{KS}^\perp\mathbf{C}(\underline{2})$ als Teilinformation die Bildung/Festlegung der Quotienten:

$$E_{01}/E_{00} = E_{02}, E_{10}/E_{00} = E_{20}, E_{11}/E_{10} = E_{12}, E_{11}/E_{01} = E_{21};$$

$$E_{22} = E_{12}/E_{02} = E_{21}/E_{20}.$$

- Für $n = 2$ beinhaltet ein Element E aus $\mathbf{KS.C}(\underline{2})$ als Teilinformation zuerst die Bildung/Festlegung der obigen Quotienten:

$$E_{01}/E_{00} = E_{\{1||\}}/E_{\{||\}} = E_{\{||1\}}, E_{10}/E_{00} = E_{\{2||\}}/E_{\{||\}} = E_{\{||2\}}, E_{11}/E_{10} = E_{\{1,2||\}}/E_{\{2||\}} = E_{\{2||1\}},$$

$$E_{11}/E_{01} = E_{\{1,2||\}}/E_{\{1||\}} = E_{\{1||2\}};$$

$$E_{\{||1|2\}} = E_{\{1||2\}}/E_{\{||2\}} = E_{\{2||1\}}/E_{\{||1\}},$$

und zusätzlich die Bildung/Festlegung des “diagonalen” Quotienten

$$E_{11}/E_{00} = E_{\{1,2||\}}/E_{\{||\}} = E_{\{||1,2\}}.$$

- Für $n = 3$ beinhaltet ein Element E aus $\mathbf{KS}^\perp\mathbf{C}(\underline{3})$ als Teilinformation die Bildung/Festlegung der Quotienten:

$E_{002}, E_{012}, E_{022}, \dots, E_{222}$. (Es sind dabei alle und nur Kombinationen der Form $E_{i,j,k}$ vorhanden, wobei $i = 2$ oder $j = 2$ oder $k = 2$, insgesamt $(4 + 4 + 4) + (2 + 2 + 2) + 1 = 19$ Kombinationen.)

- Für $n = 3$ beinhaltet ein Element E aus $\mathbf{KS.C}(\underline{3})$ als Teilinformation zuerst die Bildung/Festlegung der folgenden Quotienten: Wir bezeichnen mit $!E$ das Element aus $\mathbf{KS}^\perp\mathbf{C}(\underline{3})$, das nach Anwendung des Funktors $\mathbf{KS.C} \rightarrow \mathbf{KS}^\perp\mathbf{C}$ auf E entsteht. Dann gelten die Relationen:

$$!E_{002} = E_{\{||1\}}, !E_{012} = E_{\{2||1\}}, !E_{022} = E_{\{||1|2\}}, !E_{122} = E_{\{3||1|2\}}, \dots, !E_{222} = E_{\{||1|2|3\}}.$$

Zusätzlich beinhaltet E die Bildung/Festlegung von “diagonalen” Quotienten als Teilinformation, welche beim Übergang von E nach $!E$ verloren geht:

$$E_{\{||1,2\}} = E_{\{1,2||\}}/E_{\{||\}}, E_{\{3||1,2\}} = E_{\{1,2,3||\}}/E_{\{3||\}},$$

$$E_{\{||1,3\}} = E_{\{1,3||\}}/E_{\{||\}}, E_{\{2||1,3\}} = E_{\{1,2,3||\}}/E_{\{2||\}},$$

$$E_{\{||2,3\}} = E_{\{2,3||\}}/E_{\{||\}}, E_{\{1||2,3\}} = E_{\{1,2,3||\}}/E_{\{1||\}};$$

$$E_{\{||1,2|3\}} = E_{\{3||1,2\}}/E_{\{||1,2\}} = E_{\{1,2||3\}}/E_{\{||3\}}, E_{\{||1,3|2\}} = E_{\{2||1,3\}}/E_{\{||1,3\}} = E_{\{1,3||2\}}/E_{\{||2\}}, E_{\{||2,3|1\}} =$$

$$E_{\{1||2,3\}}/E_{\{||2,3\}} = E_{\{2,3||1\}}/E_{\{||1\}};$$

$$E_{\{||1,2,3\}} = E_{\{1,2,3||\}}/E_{\{||\}}.$$

BEMERKUNG 2.8. Das Differential im Komplex $\mathbb{Z}[\mathbf{KS}^\perp\mathbf{C}]$ entspricht **nicht** den Grothendieck-Relationen: Im Grad 1 ist das Differential von $[E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2]$ gleich zu $[E_1] - [E_0]$, und **nicht** zu $[E_1] - ([E_0] + [E_2])$. Auch in größeren Graden sind die “Wände” der Form E_{*2*} durch das Differential nicht berücksichtigt.

Aus diesem Grund führen wir im nächsten Abschnitt eine Linearisierung $\mathbb{Z}K(\mathbf{C})$ ein, in Kontrast zu $\mathbb{Z}[\mathbf{KS}^\perp\mathbf{C}]$.

2.3. Der Komplex von abelschen Gruppen $\mathbb{Z}K(\mathbf{C})$. Sei $I = \{i_0, i_0 + 1, \dots, i_f\}$ ein Intervall aus \mathbb{Z} . (Z.B. $I = [0, 2] = \{0, 1, 2\}$). Wir betrachten die (partiell) geordneten Mengen $I, I^{\times 2}, \dots, I^{\times n}$ als Kategorien. Sei \mathbf{C} eine **abelsche** Kategorie. Wir bezeichnen durch

$$\mathbb{Z}K^I(\mathbf{C})$$

den Komplex von \mathbb{Z} -Moduln, der wie folgt definiert ist:

Der Anteil im Grad n : $\mathbb{Z}K_n^I(\mathbf{C})$, ist die freie abelsche Gruppe erzeugt von exakten Multikomplexen getragen in $I^{\times n}$. Ein exakter Multikomplex getragen in $I^{\times n}$ ist ein Funktor

$$E : I^{\times n} \rightarrow \mathbf{C}, \quad a \rightarrow E_a \text{ für } a \in I^{\times n},$$

so daß ein in \mathbf{C} exakter Komplex (24) entsteht, restringiert man E auf die Unterkategorie $\{a_1, \dots, a_{k-1}\} \times I \times \{a_{k+1}, \dots, a_n\}$ von $I^{\times n}$, für $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$ beliebig in I :

$$(24) \quad 0 \rightarrow E_{a_1 \dots a_{k-1} i_0 a_{k+1} \dots a_n} \rightarrow E_{a_1 \dots a_{k-1} (i_0+1) a_{k+1} \dots a_n} \rightarrow \dots \rightarrow E_{a_1 \dots a_{k-1} i_f a_{k+1} \dots a_n} \rightarrow 0.$$

Das Differential: $d : \mathbb{Z}K_n^I(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{Z}K_{n-1}^I(\mathbf{C})$, ist definiert als

$$d = \sum_{i=1}^n (-1)^i \partial_i,$$

wobei $\partial_i = \sum_{a \in I} (-1)^a \partial_i^a$, und ∂_i^a operiert auf Basiselementen $E = [E]$ wie folgt:

$$\partial_i^a E \text{ ist die Restriktion von } E \text{ als Funktor : } I^{\times (n-1)} \cong I^{i-1} \times \{a\} \times I^{n-i} \subseteq I^n \rightarrow \mathbf{C}.$$

Es gilt $dd = 0$.

Ist \mathcal{C} eine **exakte** Kategorie, so wählen wir eine umgebende abelsche Kategorie \mathcal{A} , und definieren $\mathbb{ZK}^I(\mathcal{C})$ als den Unterkomplex von $\mathbb{ZK}^I(\mathcal{A})$, erzeugt von Basiselementen $[E]$, so daß der Funktor E über \mathcal{C} faktorisiert: $E : I^{\times n} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$.

BEMERKUNG 2.9. Die Komplexe $\mathbb{ZK}_n^{[0,2]}(\mathcal{C})$ und $\mathbb{Z}[\text{KS}^\perp \mathcal{C}]$ stimmen als Mengen überein, die Differentiale sind verschieden.

Für zwei Intervalle $I \subseteq J$ aus \mathbb{Z} entsteht (über die kanonischen Einbettungen von Indexmengen $I^{\times n} \subseteq J^{\times n}$) eine kanonische Einbettung $\mathbb{ZK}^I(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{ZK}^J(\mathcal{C})$, und wir bezeichnen durch $\mathbb{ZK}(\mathcal{C})$ den induktiven Limes bezüglich aller dieser Einbettungen.

DEFINITION 2.10. Ein ausgearteter exakter Multikomplex vom Grad n aus $\mathbb{ZK}^I(\mathcal{C})$ ist ein Multikomplex, welcher in einer geeigneten Richtung $i \in I$ der Form ist:

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow E' = E' \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 ,$$

wobei E' ein exakter Multikomplex vom Grad $n-1$ ist. Dabei identifizieren wir Funktoren $[I^{\times n} \rightarrow \mathcal{C}]$ mit Funktoren von I in die Kategorie der Funktoren $[I^{\times(n-1)} \rightarrow \mathcal{C}]$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Cat}[I^{\times n} \rightarrow \mathcal{C}] &\xrightarrow{1:1} \text{Cat}[I \rightarrow \text{Cat}[I^{\times(n-1)} \rightarrow \mathcal{C}]] \\ E &\longrightarrow a \rightarrow (\text{Restriktion von } E \text{ als Funktor: } I^{\times(n-1)} \cong I^{i-1} \times \{a\} \times I^{n-i} \subseteq I^n \rightarrow \mathcal{C}) . \end{aligned}$$

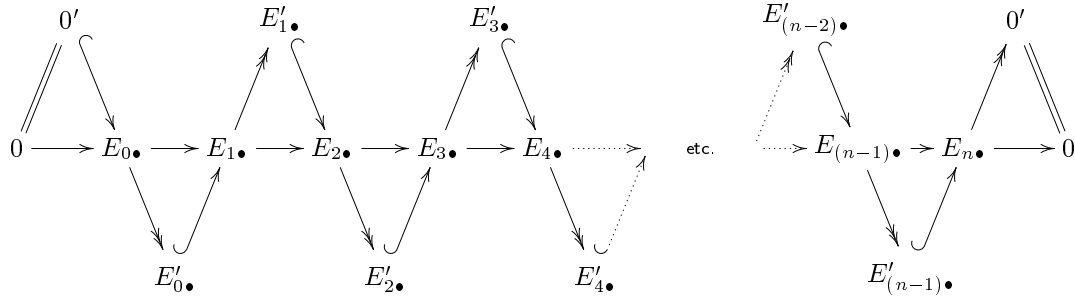
Wir bezeichnen durch $\mathbb{ZK}^I(\mathcal{C})^a$ den Unterkomplex von $\mathbb{ZK}^I(\mathcal{C})$ erzeugt von ausgearteten Elementen, und durch $\mathbb{ZK}^I(\mathcal{C})^{na}$

den entsprechenden Quotienten. Zu den natürlichen Einbettungen $\mathbb{ZK}^I(\mathcal{C})^{na} \rightarrow \mathbb{ZK}^J(\mathcal{C})^{na}$ bilden wir den direkten Limes, der als $\mathbb{ZK}(\mathcal{C})^{na}$ bezeichnet wird.

2.4. Die Fragmentierung. Sei \mathcal{C} eine exakte Kategorie, in welcher wir nach Konvention (2.1) **erwählte** Objekte, Monomorphismen und Epimorphismen festgelegt haben. Sei E ein Basiselement in $\mathbb{ZK}(\mathcal{C})$. Wir schreiben durch explizite Angabe der i -ten Richtung in E :

$$E = [0 \rightarrow E_{0\bullet} \rightarrow E_{1\bullet} \rightarrow \dots \rightarrow E_{n\bullet} \rightarrow 0] ,$$

wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit und für eine klare Notation angenommen haben, daß E im Intervall $[0, n]$ getragen ist. Dabei stehen $E_{a\bullet}$ für die Unterkomplexe $\partial_i^a E$. Wegen der Exaktheit von E in i -ter Richtung können wir mit **erwählten** Objekten $0', E'_{0\bullet}, E'_{1\bullet}, \dots, E'_{(n-1)\bullet}$ eindeutig das Diagramm bilden:



Dabei sind die Sequenzen der Form $E'_{(i-1)\bullet} \rightarrow E_{i\bullet} \rightarrow E'_{i\bullet}$ exakt für alle $i = -1, \dots, n$. ($E'_{(-1)\bullet} := 0_\bullet =: E'_{n\bullet}$)

Wir definieren die Fragmentierung bzgl. der i -ten Richtung Frag_i auf Basiselementen $[E]$ wie oben durch:

$$\text{Frag}_i(E) := -[0_\bullet \rightarrow E_{0\bullet} \rightarrow E'_{0\bullet}] + [E'_{0\bullet} \rightarrow E_{1\bullet} \rightarrow E'_{1\bullet}] - [E'_{1\bullet} \rightarrow E_{2\bullet} \rightarrow E'_{2\bullet}] + \dots \pm [E'_{(n-1)\bullet} \rightarrow E_n \rightarrow 0_\bullet] .$$

Fragmentierungen bzgl. verschiedener Richtungen i, j kommutieren: $\text{Frag}_i \text{Frag}_j = \text{Frag}_j \text{Frag}_i$.

Wir definieren die Fragmentierung $\text{Frag} = \text{Frag}^{(n)}$ eines exakten Multikomplexes mit n Richtungen E durch:

$$\text{Frag } E := \text{Frag}_n \dots \text{Frag}_1 E ,$$

und erweitern diese Abbildung linear auf $\mathbb{ZK}(\mathcal{C})$. Es gelten die Relationen:

$$\partial_i^a \text{Frag}_j \begin{cases} \text{Frag}_{j-1} \partial_i^a & \text{falls } j > i, \\ \partial_i^a & \text{falls } j = i, \\ \text{Frag}_j \partial_i^a & \text{falls } j < i. \end{cases}$$

LEMMA 2.11. *Frag : $\mathbb{Z}K(C) \rightarrow \mathbb{Z}K^{[0,2]}(C)$ ist eine Komplexabbildung.*

BEWEIS: Für $\xi \in \mathbb{Z}K_n(C)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \partial_i \text{Frag } \xi &= \partial_i \text{Frag}^{(n)} \xi \\
 &= \partial_i \text{Frag}_n \text{Frag}_{n-1} \dots \text{Frag}_1 \xi \\
 &= \text{Frag}_{n-1} \partial_i \text{Frag}_{n-1} \dots \text{Frag}_1 \xi \\
 &= \text{Frag}_{n-1} \dots \partial_i \text{Frag}_{i+1} \text{Frag}_i \text{Frag}_{i-1} \dots \text{Frag}_1 \xi \\
 &= \text{Frag}_{n-1} \dots \text{Frag}_i \partial_i \text{Frag}_i \text{Frag}_{i-1} \dots \text{Frag}_1 \xi \\
 &= \text{Frag}_{n-1} \dots \text{Frag}_i \partial_i \text{Frag}_{i-1} \dots \text{Frag}_1 \xi = \dots \\
 &= \text{Frag}_{n-1} \dots \text{Frag}_i \text{Frag}_{i-1} \dots \text{Frag}_1 \partial_i \xi \\
 &= \text{Frag}^{(n-1)} \partial_i \xi = \text{Frag } \partial_i \xi .
 \end{aligned}$$

□

3. Die KG.-Konstruktion

3.1. Die KG.-Konstruktion.

DEFINITION 3.1.

- **subFullCube_n** ist die volle Unterkategorie von FullCube_n mit den Objekten $\underline{0}$ und $\alpha(\underline{m})$ für $m \neq 0$.
- **subCube_n** ist die volle Unterkategorie von Cube_n mit folgenden Objekten: das Objekt $\underline{0}$ und alle Objekte der Form $a2b$ für eine geeignete Wahl der Wörter a und b .
- Wir bezeichnen durch s oder genauer s_n den kanonischen Einbettungsfunktor: **subFullCube_n** \rightarrow FullCube_n respektive **subCube_n** \rightarrow Cube_n.

Sei $h \in \text{Hom}_{\square}(\underline{n}, \underline{n}')$. Der Funktor $h_* : \text{FullCube}_n \rightarrow \text{FullCube}_{n'}$ induziert einen kanonischen Funktor **sub**(h_*) : **subFullCube_n** \rightarrow **subFullCube_{n'}**.

DEFINITION 3.2. Sei \mathcal{C} eine exakte Kategorie. Die KG.-Konstruktion zu \mathcal{C} ist die kubische Menge $\text{KG}.\mathcal{C}$, definiert auf Objekten durch:

$$\text{KG}.\mathcal{C}(\underline{n}) := \left\{ \eta := (\eta_+, \eta_-; \tau_\eta) \mid \eta_\pm \in \text{KS}.\mathcal{C}(\underline{n}) \text{ und } s^*\eta_+ \stackrel{\tau_\eta}{=} s^*\eta_- : \mathbf{subFullCube}_n \rightarrow \mathcal{A} \right\}$$

und auf Morphismen durch:

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{n} & \xrightarrow{h} & \underline{n}' \\
 \text{KG}.\mathcal{C}(\underline{n}) & \xleftarrow{\text{KG}.\mathcal{C}(h)} & \text{KG}.\mathcal{C}(\underline{n}')
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} \text{in } \square \text{ induziert:} \\ \text{gegeben durch:} \end{array}$$

$$\eta := (\text{KS}.\mathcal{C}(h)\eta'_+, \text{KS}.\mathcal{C}(h)\eta'_-; (\mathbf{sub}(h_*))^*\tau_{\eta'}) \longleftarrow (\eta'_+, \eta'_-; \tau_{\eta'}) =: \eta'.$$

DEFINITION 3.3. Sei \mathcal{C} eine exakte Kategorie. Die KG^\perp -Konstruktion zu \mathcal{C} ist die kubische Menge $\text{KG}^\perp.\mathcal{C}$, definiert auf Objekten durch:

$$\text{KG}^\perp.\mathcal{C}(\underline{n}) := \left\{ \eta := (\eta_+, \eta_-; \tau_\eta) \mid \eta_\pm \in \text{KS}^\perp.\mathcal{C}(\underline{n}) \text{ und } s^*\eta_+ \stackrel{\tau_\eta}{=} s^*\eta_- : \mathbf{subCube}_n \rightarrow \mathcal{A} \right\}$$

und auf Morphismen durch:

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{n} & \xrightarrow{h} & \underline{n}' \\
 \text{KG}^\perp.\mathcal{C}(\underline{n}) & \xleftarrow{\text{KG}^\perp.\mathcal{C}(h)} & \text{KG}^\perp.\mathcal{C}(\underline{n}')
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} \text{in } \square^\perp \text{ induziert:} \\ \text{gegeben durch:} \end{array}$$

$$\eta := (\text{KS}^\perp.\mathcal{C}(h)\eta'_+, \text{KS}^\perp.\mathcal{C}(h)\eta'_-; (\mathbf{sub}(h_*))^*\tau_{\eta'}) \longleftarrow (\eta'_+, \eta'_-; \tau_{\eta'}) =: \eta'.$$

Insbesondere können $\text{KG}.\mathcal{C}(\underline{0})$ und $\text{KG}^\perp.\mathcal{C}(\underline{0})$ mit der Menge $\{(\eta_+, \eta_-) \mid \eta_\pm \in \text{Ob } \mathcal{C}\}$ identifiziert werden.

Wir können uns die Elemente $(\eta_+, \eta_-; \tau_\eta)$ von $\text{KG}^\perp.\mathcal{C}(\underline{n})$ wie folgt vorstellen: Seien η_+ und η_- zwei Würfel-Diagramme wie in (23). Diese Würfel-Diagramme unterliegen der Bedingung, daß alle Quotienten der Monomorphismen dieser Diagramme respektive zueinander isomorph sind: $E_{a2b}^+ \cong E_{a2b}^-$ für alle (sinnvollen) a, b . Wir legen dann als Teil der Struktur solche Isomorphismen fest, welche mit den Abbildungen aus den zwei Diagrammen verträglich sind. (Diese Isomorphismen erklären objektweise τ_η , ihre Verträglichkeit mit η_+ und η_- erklären die Natürlichkeit von τ_η .)

Wir können uns weiter die Elemente $(\eta_+, \eta_-; \tau_\eta)$ von $\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}\mathcal{C}(\underline{n})$ ähnlich vorstellen: η_+ und η_- beinhalten die Bildung mehrerer Quotienten, und τ_η kodiert mit η_+, η_- verträgliche (natürliche) Isomorphismen aller sich entsprechenden solchen Quotienten.

3.2. Die Abbildung $\mathbb{Z}[\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}\mathcal{C}] \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}^{[0,2]}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}(\mathcal{C})$. Sei $\eta = (\eta_+, \eta_-; \tau_\eta)$ ein Basiselement in $\mathbb{Z}[\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}\mathcal{C}(\underline{n})]$. η_+ und η_- sind exakte Multikomplexe mit n Richtungen getragen in $[0, 2]$. Der Multikomplex mit $(n+1)$ Richtungen getragen in $[0, 2]$, welcher explizit formal in erster Richtung wie folgt aussieht:

$$\eta_+ \rightarrow \eta_- \rightarrow 0$$

ist nicht wohl— sondern nur partiell definiert als Funktor $\{0 < 1 < 2\}^{\times(n+1)} \rightarrow \mathcal{C}$. Um dies formal zu beheben, führen wir die Kategorie \mathcal{C}_* ein. Sie hat die gleichen Objekte wie \mathcal{C} und für $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$ setzen wir $\mathcal{C}_*[A \rightarrow B] := \mathcal{C}[A \rightarrow B] \sqcup \{*_AB\}$. Die neu eingeführten Morphismen $*_{AB}$, $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$, heißen $*$ -Morphismen. Verknüpfungen von links und rechts mit $*$ -Morphismen ergeben $*$ -Morphismen. Wir definieren nun den Multikomplex mit $(n+1)$ Richtungen $\varsigma\eta$ in \mathcal{C}_* durch:

$$\varsigma\eta := \left(\eta_+ \xrightarrow{\tau_\eta \sqcup *} \eta_- \longrightarrow 0 \right)$$

mit der Konvention, daß $\tau_\eta \sqcup *$ auf **subCube_n** gleich τ_η ist und sonst aus $*$ -Morphismen besteht.

Wir bezeichnen durch $d_{\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}}$, d_* , $d_{\mathcal{K}}$ die Differentiale auf $\mathbb{Z}[\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}\mathcal{C}]$, $\mathbb{Z}\mathcal{K}(\mathcal{C}_*)$ und $\mathbb{Z}\mathcal{K}(\mathcal{C})$ und durch k die Verknüpfung:

$$(25) \quad k_n : \mathbb{Z}[\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}\mathcal{C}(\underline{n})] \xrightarrow{\varsigma} \mathbb{Z}\mathcal{K}_{n+1}(\mathcal{C}_*) \xrightarrow{d_*} \mathbb{Z}\mathcal{K}_n(\mathcal{C}_*) \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}\mathcal{K}_n(\mathcal{C}) ,$$

wobei π die mengentheoretische Abbildung ist, welche auf Basiselementen η_* aus $\mathbb{Z}\mathcal{K}_n(\mathcal{C}_*)$ durch $\eta_* \rightarrow \eta_*$ bzgl. $\eta_* \rightarrow 0$ definiert ist, in Abhängigkeit davon, ob η_* keinen respektive mindestens einen $*$ -Morphismus beinhaltet. Wir bezeichnen durch ς bzw. j die oben auf Erzeugenden beschriebene bzw. die kanonische Einbettung von $\mathbb{Z}[\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}\mathcal{C}]$ bzw. $\mathbb{Z}\mathcal{K}(\mathcal{C})$ in $\mathbb{Z}\mathcal{K}(\mathcal{C}_*)$.

SATZ 3.4. Die Morphismen $(k_n)_n$ aus (25) induzieren einen Komplex-Morphismus k .

BEWEIS:

Für ein $\eta \in \mathbb{Z}[\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}\mathcal{C}(\underline{n})]$ gelten die Relationen:

$$\begin{aligned} \varsigma d_{\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}}(\eta) &= \sum_{i \geq 2} (-1)^i (\partial_i^1 \varsigma\eta - \partial_i^0 \varsigma\eta) \\ jk\eta &= (j\pi) d_* \varsigma\eta = \underbrace{(\partial_1^0 \varsigma\eta - \partial_1^1 \varsigma\eta)}_{\eta_+} + \sum_{i \geq 2} (-1)^{i-1} \partial_i^2 \varsigma\eta . \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\varsigma d_{\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}} \eta \oplus jk\eta = d_* \varsigma\eta .$$

Dabei bezieht sich \oplus auf den Projektor $j\pi$. Die Gleichheit $kd_{\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}}\eta = -d_{\mathcal{K}}k\eta$ folgt aus:

$$\begin{aligned} jk d_{\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}} \eta &= d_* \varsigma d_{\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}} \eta \ominus \varsigma d_{\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}} d_{\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}} \eta = d_* \varsigma d_{\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}} \eta \\ &= -d_* (d_* \varsigma\eta \ominus \varsigma d_{\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}} \eta) = -d_* jk\eta \\ &= -jd_{\mathcal{K}}k\eta . \end{aligned}$$

(Dabei kann \ominus als “—” aufgefaßt werden. Genauer ist ein Ausdruck der Form $x \ominus x_1 = x_2$ äquivalent zu $x = x_1 \oplus x_2$.) \square

Die Zuordnung $\eta \rightarrow (-1)^{|\eta|} k\eta$ ist also ein Komplexmorphismus $\mathbb{Z}[\mathbb{K}\mathcal{G}^{\perp}\mathcal{C}] \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}(\mathcal{C})$, welcher per Definition über $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{[0,2]}(\mathcal{C})$ faktorisiert.

4. Die Koprodukt-Struktur auf kubischen Mengen

Sei K eine (\perp) -kubische Menge.

Wir führen die Bezeichnungen ein:

- $T = T_n$ ist die “totale” Indexmenge der Indizes $1, \dots, n$.
- Für $E \in \underline{n}$ identifizieren wir E mit dem entsprechenden Vektor $E = (E_1, \dots, E_n) \in \square_n$.
- Seien $E \subseteq F$ Untermengen von \underline{n} . Sei k die Anzahl der Elemente von $\{i : E_i \neq F_i\}$. Es gibt dann eine eindeutige Abbildung $f : \underline{k} \rightarrow \underline{n}$, welche induziert

$$f_{\square} : [0, 1]^k = \square_k \rightarrow \square_n = [0, 1]^n \quad \text{mit dem Bild} \quad \{x \in [0, 1]^n : E_i \leq x_i \leq F_i\} =: [E, F] .$$

Wir bezeichnen diese Abbildung f durch $c_{E,F}$ oder $c_{[E,F]}$, und $K(c_{E,F})$ durch $\partial_{E,F}$ oder $\partial_{[E,F]}$. Es gilt insbesondere:

$$\begin{aligned}\partial_i^0 &= \partial_{[0,T \setminus i]} \\ \partial_i^1 &= \partial_{[i,T]}\end{aligned}$$

SATZ 4.1. *Auf $\mathbb{Z}[K]$ liegt die Struktur einer differenziellen Koalgebra vor, welche durch die Daten erklärt ist:*

Das Differential: $d := \sum_{i=1}^n (\partial_i^1 - \partial_i^0) : \mathbb{Z}_n[K] \rightarrow \mathbb{Z}_{n-1}[K]$.

Die Komultiplikation Δ : Sei $\xi \in K_n$. Wir schreiben auch ξ für $[\xi]$, das entsprechende Element in $\mathbb{Z}_n[K]$, ein typisches Basis-Element. Dann ist:

$$\Delta \xi := \sum_{E \sqcup F = T} \epsilon(E, F) \partial_{[0,E]} \xi \otimes \partial_{[E,T]} \xi .$$

Dabei ist $T = T_n$ abhängig nur vom Grad von ξ .

BEWEIS: • Wir zeigen zuerst die **Verträglichkeit zwischen Δ und d** : $d^{\otimes 2} \Delta = \Delta d$ als Abbildungen $\mathbb{Z}_n[K] \rightarrow (\mathbb{Z}[K] \otimes \mathbb{Z}[K])_{-1}$.

$$\begin{aligned}(26) \quad d^{\otimes 2} \Delta \xi &= d^{\otimes 2} \sum_{\substack{0 \leq E \leq T \\ E \sqcup F = T}} \epsilon(E, F) \partial_{[0,E]} \xi \otimes \partial_{[E,T]} \xi \\ &= \sum_{E \sqcup F = T} \epsilon(E, F) \left\{ \begin{aligned} &+ (-1)^{|E|} \sum_{i \in E} \epsilon(i, E \setminus i) (\partial_i^1 - \partial_i^0) \partial_{[0,E]} \xi \otimes \partial_{[E,T]} \xi \\ &\quad \partial_{[0,E]} \xi \otimes \epsilon(j, F) (\partial_j^1 - \partial_j^0) \partial_{[E,T]} \xi \end{aligned} \right\}\end{aligned}$$

Die Terme der Form $\partial_{[0,G]} \xi \otimes \partial_{[G \sqcup k, T]} \xi$ kürzen sich: Sie kommen vor in:

$$\begin{aligned}&\sum_{E_1 \sqcup F_1 = T} \epsilon(E_1, F_1) \sum_{i \in E_1} \epsilon(i, E_1 \setminus i) (-1) \underbrace{\partial_i^0 \partial_{[0,E_1]} \xi}_{\partial_{[0,E_1 \setminus i]}} \otimes \partial_{[E_1,T]} \xi \quad \text{und in} \\ &\sum_{E_2 \sqcup F_2 = T} \epsilon(E_2, F_2) \sum_{j \in F_2} (-1)^{|E_2|} \epsilon(i, E_2 \setminus i) \partial_{[0,E_2]} \xi \otimes \overbrace{\partial_j^1 \partial_{[E_2,T]} \xi}^{\partial_{[E_2 \sqcup j, T]}} \xi .\end{aligned}$$

Die Korrespondenz der Paare wie oben ($i \in E_1, F_1$) und ($E_2, j \in F_2$), gegeben durch die Abbildung $(i \in E_1, F_1) \rightarrow (E_2 := E_1 \setminus i, j := i \in F_2 := F_1 \sqcup i)$, ist eine Bijektion. Die folgenden Vorzeichen zu entsprechenden Paaren sind gleich:

$$\epsilon(E_1, F_1) \epsilon(i, E_1 \setminus i) = \epsilon(E_2, F_2) (-1)^{|E_2|} \epsilon(j, F_2 \setminus j) ,$$

da sie Vorzeichen der gleichen Shuffle-Permutation sind, welche als Verknüpfung entsteht:

$T \rightarrow E_1 \sqcup F_1 \rightarrow i \sqcup (E_1 \setminus i) \sqcup F_1$ respektive

$T \rightarrow E_2 \sqcup F_2 \rightarrow E_2 \sqcup j \sqcup (F_2 \setminus j) \rightarrow j \sqcup E_2 \sqcup (F_2 \setminus j)$.

Wir können also den Ausdruck (26) weiter bearbeiten: Er gleicht

$$\begin{aligned}(27) \quad &\sum_{E \sqcup F = T} \epsilon(E, F) \left\{ \begin{aligned} &+ (-1)^{|E|} \sum_{i \in E} \epsilon(i, E \setminus i) \partial_i^1 \partial_{[0,E]} \xi \otimes \partial_{[E,T]} \xi \\ &\quad \partial_{[0,E]} \xi \otimes \epsilon(j, F \setminus j) (-1) \partial_j^0 \partial_{[E,T]} \xi \end{aligned} \right\} \\ &= \sum_{E \sqcup F = T} \left\{ \begin{aligned} &- \sum_{i \in E} \epsilon(E, F) \epsilon(i, E \setminus i) \partial_{[i,E]} \xi \otimes \partial_{[E,T]} \xi \\ &- \sum_{j \in F} \epsilon(E, F) (-1)^{|E|} \epsilon(j, F \setminus j) \partial_{[0,E]} \xi \otimes \partial_j^0 \partial_{[E,T \setminus j]} \xi \end{aligned} \right\}\end{aligned}$$

Für $i \in E$ und $j \in F$ gelten die Relationen

$$\begin{aligned}\epsilon(E, F) \epsilon(i, E \setminus i) &= \epsilon(i, T \setminus i) \epsilon(E \setminus i, F) & \text{bzw.} \\ \epsilon(E, F) (-1)^{|E|} \epsilon(j, F \setminus j) &= \epsilon(j, T \setminus j) \epsilon(E, F \setminus j) ,\end{aligned}$$

entsprechend zu den Vorzeichen der Shuffle-Permutationen

$$\begin{aligned}T \rightarrow E \sqcup F \rightarrow i \sqcup (E \setminus i) \sqcup F \quad \text{und} \quad T \rightarrow i \sqcup (T \setminus i) \rightarrow i \sqcup (E \setminus i) \sqcup F & \quad \text{bzw.} \\ T \rightarrow E \sqcup F \rightarrow E \sqcup j \sqcup (F \setminus j) \rightarrow j \sqcup E \sqcup (F \setminus j) \quad \text{und} \quad T \rightarrow j \sqcup (T \setminus j) \rightarrow j \sqcup E \sqcup (F \setminus j) .\end{aligned}$$

Mit den Substitutionen $E' = E \setminus i$ und $F' = F \setminus j$ und der Anwendung der Formeln

$$\partial_{[i, E' \sqcup i]} = \partial_{[0, E']} \partial_i^1, \quad \partial_{[E' \sqcup i, T]} = \partial_{[E', T \setminus i]} \partial_i^1 \quad \text{resp.} \quad \partial_{[0, E]} = \partial_{[0, E]} \partial_j^0, \quad \partial_{[E, T \setminus j]} = \partial_{[E, T \setminus j]} \partial_j^0$$

entsteht aus (27) sukzessive:

$$\begin{aligned}
& \left\{ - \sum_{i \in T} \sum_{E' \sqcup F = T \setminus i} \epsilon(i, T \setminus i) \epsilon(E', F) \partial_{[i, E' \sqcup i]} \xi \otimes \partial_{[E' \sqcup i, T]} \xi \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j \in T} \sum_{E \sqcup F' = T \setminus j} \epsilon(j, T \setminus j) \epsilon(E, F') \partial_{[0, E]} \xi \otimes \partial_{[E, T \setminus j]} \xi \right\} \\
&= \left\{ - \sum_{i \in T} \epsilon(i, T \setminus i) \sum_{E' \sqcup F = T \setminus i} \epsilon(E', F) \partial_{[0, E']} \partial_i^1 \xi \otimes \partial_{[E', T \setminus i]} \partial_i^1 \xi \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j \in T} \epsilon(j, T \setminus j) \sum_{E \sqcup F' = T \setminus j} \epsilon(E, F') \partial_{[0, E]} \partial_j^0 \xi \otimes \partial_{[E, T \setminus j]} \partial_j^0 \xi \right\} \\
&= \sum_i \epsilon(i, T \setminus i) \Delta \partial_i^1 \xi - \sum_j \epsilon(j, T \setminus j) \Delta \partial_j^0 \xi \\
&= \Delta \sum_i (-1)^{i-1} (\partial_i^1 \xi - \partial_i^0 \xi) \\
&= \Delta d\xi.
\end{aligned}$$

• Δ ist eine Komultiplikation:

$$\begin{aligned}
(28) \quad (\Delta \otimes 1) \Delta \xi &= (\Delta \otimes 1) \sum_{E_1 \sqcup E_2 = T} \epsilon(E_1, E_2) \partial_{[0, E_1]} \xi \otimes \partial_{[E_1, T]} \xi \\
&= \sum_{E_1 \sqcup E_2 = T} \sum_{E_{11} \sqcup E_{12} = E_1} \epsilon(E_1, E_2) \epsilon(E_{11}, E_{12}) \partial_{[0, E_{11}]} \xi \otimes \partial_{[E_{11}, E_1]} \xi \otimes \partial_{[E_1, T]} \xi \\
(29) \quad &= \sum_{F_1 \sqcup F_2 \sqcup F_3 = T} \epsilon(F_1, F_2, F_3) \partial_{[0, F_1]} \xi \otimes \partial_{[F_1, F_1 \sqcup F_2]} \xi \otimes \partial_{[F_1 \sqcup F_2, T]} \xi \\
(30) \quad &= (1 \otimes \Delta) \Delta \xi,
\end{aligned}$$

wobei der letzte Übergang eine gespiegelte Berechnung zwischen (28) und (29), ausgehend vom symmetrischen Term (29), unterdrückt. \square

5. Die kubische Bar-Konstruktion KB

Sei G eine Gruppe. Für uns ist der Fall $G = GL_n(F)$, F Ring oder Körper, von besonderem Interesse. Wir betrachten G auch als Kategorie mit einem Objekt und mit der Menge der Morphismen gleich G . Die Verknüpfung von Morphismen entspricht der Multiplikation in G .

DEFINITION 5.1. Die kubische Bar-Konstruktion ist die \perp -kubische Menge $\text{KB} = \text{Hom}(\cdot, G) : \square \rightarrow G$. Elemente aus $\text{KB}_n := \text{KB}(\underline{n})$ werden kubische Diagramme (mit Morphismen aus G , vom Grad n) genannt.

Diese hat die KAN-Eigenschaft.

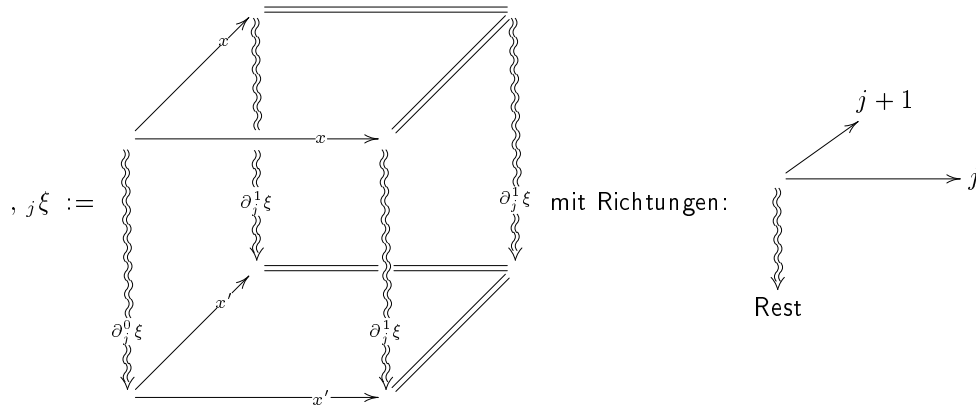
Die \perp -kubische Menge KB kann zur Struktur einer kubischen Menge mit Verbindungen und Verknüpfungen erweitert werden:

Sei ξ ein kubisches Diagramm vom Grad n . Sei j eine der Richtungen $1, \dots, n$. Durch die Isomorphie $\{0, 1\}^n = \{0, 1\}^{(j-1)} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}^{(n-j)} \cong \{0, 1\} \times \{0, 1\}^{(j-1)} \times \{0, 1\}^{(n-j)} \cong \{0, 1\} \times \{0, 1\}^{(n-1)}$, welche die Abbildung $\square_n \rightarrow \square_n$ induziert, $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_j, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$, schreiben wir formal das Diagramm ξ als ein quadratisches Diagramm, welches nach der Richtung j und nach den übrigen Richtungen explizit dargestellt ist:

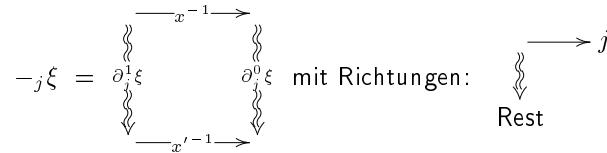
$$(31) \quad \xi = \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{x} & \\ \wr & & \wr \\ \partial_j^0 \xi & & \partial_j^1 \xi \\ \wr & & \wr \\ & \xrightarrow{x'} & \end{array} \quad \text{mit Richtungen:} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \wr \\ \text{Rest} \end{array}$$

Dabei haben wir durch x und x' die Morphismen $\xi(00 \dots 0 \dots 0 \rightarrow 00 \dots 1 \dots 0)$ resp. $\xi(11 \dots 0 \dots 1 \rightarrow 11 \dots 1 \dots 1)$ mit Änderungen je in der j -ten Komponente. Alle anderen Morphismen in j -ter Richtung wurden nicht gekennzeichnet. ξ ist bestimmt durch $\partial_j^0 \xi$, $\partial_j^1 \xi$ und x . Wir werden stillschweigend des weiteren solche Darstellungen benutzen.

ξ ordnen wir durch die Verbindung ∂_j das Würfelldiagramm mit einer zusätzlichen Dimension zu:



Die unäre Operation $-_j$ hat die Wirkung:



Die partiell definierte Operation $+_j$ ist für zwei kubische Diagramme ξ, η gleicher Dimension mit $\partial_j^1 \xi = \partial_j^0 \eta$ gegeben durch:

$$(32) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \partial_j^0 \xi \quad \partial_j^1 \xi \\ \xleftarrow{x'} \end{array} +_j \begin{array}{c} \xrightarrow{y} \\ \partial_j^0 \eta \quad \partial_j^1 \eta \\ \xleftarrow{y'} \end{array} = \begin{array}{c} \xrightarrow{yx} \\ \partial_j^0 \xi \quad \partial_j^1 \eta \\ \xleftarrow{y'x'} \end{array} \quad \text{mit Richtungen: } \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \text{Rest} \end{array}$$

Die Axiome einer kubischen Menge mit Verbindungen und Verknüpfungen sind für $(\mathbf{KB}, \partial, \partial_j, +_j, -_j)$ erfüllt.

6. Anpassungen für die Einführung einer ∂ -Struktur auf der \mathbf{KG}^\perp -Konstruktion

Die Resultate aus diesem Abschnitt werden des weiteren nicht mehr wesentlich benutzt. Sie werden aus diesem Grund und aus mangelnder Möglichkeit einer schnelleren anschaulichen Darstellung nur skizziert.

Wir behandeln nicht mehr explizit Paare von kubischen Diagrammen, sondern erklären Konstruktionen für einfache kubische Diagramme. Die Konstruktionen sind funktoriell und lassen sich *a posteriori* leicht auch für Paare übertragen.

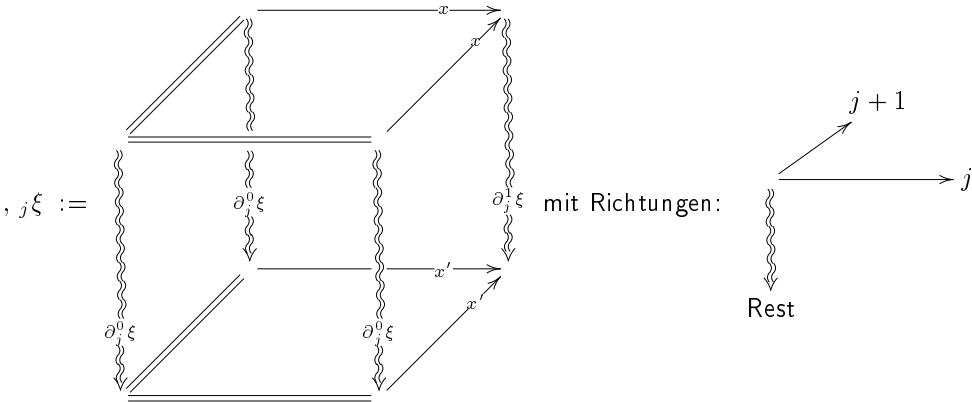
Die Wahl von Quotienten bereitet uns für die Einführung der Verknüpfungen $+_j$ Probleme. Wir definieren nur für kubische Diagramme mit *erwählten* Quotienten-Daten solche Verknüpfungen. Wir reduzieren dadurch die Beschreibung eines solchen kubischen Diagramms auf die Unterkategorie $\{0 < 1\}^n$ von $\{0 < 1 < 2\}^n$. Eine Skizze der Verknüpfung von solchen kubischen Diagrammen ist die Formel (32). Dabei sind x und y Monomorphismen. Also auch die Verknüpfung yx . Man (muss und) kann leicht prüfen, daß sich das nach Verknüpfung entstandene, in $\{0 < 1\}^n$ getragene, kubische Diagramm zu einem in $\{0 < 1 < 2\}^n$ getragenen kubischen Diagramm erweitern läßt.

Um die ∂ -Verbindungen einzuführen, sind Anpassungen notwendig: Entweder betrachten wir Paare von Würfeln, welche in $\{-1 < 0 < 1\}^n$ statt $\{0 < 1 < 2\}^n$ getragen sind, und welche Isomorphie-Daten zu (-1) -Würfelseiten statt (2) -Würfelseiten haben,

oder wir ändern leicht die Axiome der ∂ -Abbildungen. Wir werden diese zweite Möglichkeit skizzieren. Die Axiome der ∂ -Abbildungen sind asymmetrisch bezüglich ∂^0 und ∂^1 . Wir vertauschen die Rolle der Indizes 0 und 1 in den Axiomen, so daß z.B. im Falle der kubischen Menge der singulären kubischen Simplizes SX eines topologischen Raumes X eine ∂ -Struktur bzgl. der neuen Axiome durch die Formel $\partial_i x(t_1, \dots, t_n) := x(t_1, \dots, t_{i-1}, \min(t_i, t_{i+1}), t_{i+2}, \dots, t_n)$ erklärt ist. (max wurde durch min ersetzt.)

Für eine Darstellung (31) eines Paares von kubischen Diagrammen, welches auf $\{0 < 1\}^n$ eingeschränkt war, und in welcher insbesondere x bzw. x' ein Monomorphismus-Paar ist, und so daß $\partial_j^a \xi$, auch entsprechend eingeschränkt,

aus Monomorphismen–Paaren besteht, definieren wir:



Dieses Diagramm–Paar kann weiter mit 0 und Quotienten–Daten aus ξ kanonisch zu einem in $\{0 < 1 < 2\}^{n+1}$ getragenen kubischen Diagramm–Paar erweitert werden.
Eine unäre Operation existiert für die $\mathbb{K}G^\perp$ –Konstruktion nicht.

Übersetzungen simplizial-kubisch

1. Mengentheoretische Übersetzungen $G_n\mathcal{C} \rightarrow KG_n\mathcal{C}$

Wir ordnen in diesem Abschnitt einem WALDHAUSEN-Diagramm(-Paar) ein Würfel-Diagramm(-Paar) zu. Wir identifizieren auch in diesem Abschnitt wie in (20) Elemente in dem n -fachen kartesischen Produkt $A^{\times n}$ einer Menge A mit Wörtern der Länge n aus dem Alphabet A , die in umgekehrter Ordnung geschrieben sind.

DEFINITION 1.1. Der Baby-Würfel der Dimension n oder der n -Baby-Würfel ist die volle Unterkategorie $Baby_n$ der Kategorien $Cube_n$ und $FullCube_n$ mit den Objekten $\{\underline{0}\} \sqcup \underline{n}$:

$$Ob\ Baby_n = \{\underline{0}\} \sqcup \underline{n} = \{\underline{0}\} \sqcup \{0, 1\}^{\times n} \subseteq \{\underline{0}\} \sqcup \{0, 1, 2\}^{\times n} = Ob\ Cube_n \subseteq Ob\ FullCube_n .$$

$Baby_n$ ist die maximale volle Unterkategorie von $FullCube_n$, deren Morphismen entweder Monomorphismen sind oder über Null faktorisieren. Wir bezeichnen durch $\underline{0} \sqcup \underline{shift(n)}$ die Unterkategorie von $Wald_{n+1}$ mit der gleichen Eigenschaft, nämlich $(0 < (0, 1) < (0, 2) < \dots < (0, n+1))$, wobei wir identifizieren:

$$(\underline{0} < \underline{shift}(0) < \underline{shift}(1) < \dots < \underline{shift}(n)) \cong (0 < (0, 1) < (0, 2) < \dots < (0, n+1))$$

SATZ 1.2. Der Funktor, der durch die folgende Objektzuweisung definiert ist:

$$\begin{aligned} Baby_n &\longrightarrow \underline{0} \sqcup \underline{shift(n)} \\ \underline{0} &\longrightarrow \underline{0} \\ * \underbrace{011\dots 1}_{k\ mal} &\longrightarrow (0, \underline{shift}(k)) = (0, k+1), \end{aligned}$$

wobei $*$ ein beliebiges Wort geeigneter Länge ist, hat eine eindeutige Erweiterung zu einem exakten Funktor:

$$(33) \quad FullCube_n \xrightarrow{\alpha} Wald_{n+1} .$$

Dieser Funktor bildet dann die Unterkategorie $\mathbf{sub}FullCube_n$ von $FullCube_n$ in die Unterkategorie $\mathbf{sub}Wald_{n+1}$ von $Wald_{n+1}$ ab, und den faktorisierten Funktor $\mathbf{sub}FullCube_n \rightarrow \mathbf{sub}Wald_{n+1}$ bezeichnen wir durch $\mathbf{sub}\alpha$.

BEWEIS: Wir geben die Konstruktion dieses Funktors. Die Eindeutigkeit folgt aus der Konstruktion. Die Objekte von $Baby_n$ entsprechen den Objekten $\underline{0}$ und $\{I||\}$. Seien $T := \{1, 2, \dots, n\}$ und $T^* := T \sqcup \{n+1\}$. Durch die Festlegung von α auf $Baby_n$ folgt:

$$(34) \quad \alpha(\underline{0}) = \underline{0} \text{ und } \alpha\{I||\} = (0, \min \mathbb{C}I) \text{ für } I \subseteq T .$$

Wir haben das Komplement von I bezüglich T^* durch $\mathbb{C}I$ bezeichnet, und benutzen des weiteren diese Notation für beliebige Untermengen von T . Das Minimum einer nichtleeren Untermenge von T^* (mit der kanonischen Ordnung) wurde mit \min bezeichnet.

Wir definieren nun induktiv nach m die Bilder von Objekten $\{I||J_1|\dots|J_m\}$, wobei der Start $m = 0$ in (34) festgelegt ist.

Sei $c := \{I||J_1|J_2|\dots|J_m\} \in Ob\ FullCube_n$. Wir bilden eine Kette maximaler Länge $l \leq m$ von **verschiedenen** Indizes s_1, s_2, \dots, s_l so, daß die Untermengen $I; J_{s_1}, J_{s_2}, \dots, J_{s_l}$ von T Folgendes erfüllen:

$$\begin{aligned} j_{-1} &:= 0 \\ j_0 &:= \min \mathbb{C}I \in J_{s_1} , \\ j_1 &:= \min \mathbb{C}(I \sqcup J_{s_1}) \in J_{s_2} , \\ j_2 &:= \min \mathbb{C}(I \sqcup J_{s_1} \sqcup J_{s_2}) \in J_{s_3} , \\ &\dots\dots\dots \\ j_{l-1} &:= \min \mathbb{C}(I \sqcup J_{s_1} \sqcup \dots \sqcup J_{s_{l-1}}) \in J_{s_l} , \text{ und sei dann} \\ j_l &:= \min \mathbb{C}(I \sqcup J_{s_1} \sqcup \dots \sqcup J_{s_l}) \in \mathbb{C}(I \sqcup J_1 \sqcup \dots \sqcup J_m) . \end{aligned}$$

Wollen wir in der obigen Festlegung der Notation spezifizieren, daß j_0, \dots, j_l zu c gebildet sind, so schreiben wir j_0^c, \dots, j_l^c . Wir definieren nun:

$$(35) \quad \alpha(c) := \begin{cases} \underline{0} & \text{falls } l < m \text{ und} \\ (j_{l-1}, j_l) & \text{falls } l = m, \end{cases}$$

bedingt durch die Tatsache, daß in der exakten Sequenz

$$\alpha(\{I|J_2|\dots|J_m\}) \mapsto \alpha(\{I \sqcup J_1|J_2|\dots|J_m\}) \twoheadrightarrow \alpha(\{I|J_1|J_2|\dots|J_m\})$$

durch die induktive Konstruktion die ersten zwei Objekte bestimmt sind:

$$\alpha\{I|J_2|\dots|J_m\} = \underline{0} \text{ und} \\ \alpha\{I \sqcup J_1|J_2|\dots|J_m\} = \underline{0} \text{ respektive } (j_{l-1}, j_l) \text{ falls } l-1 < m-1 \text{ bzw. } l-1 = m-1.$$

Umgekehrt definiert (35) einen exakten Funktor:

In der allgemeinen exakten Sequenz

$$(36) \quad \{I|J_1|\dots|\check{J}_k|\dots|J_m\} \mapsto \{I \sqcup J_k|J_1|\dots|\check{J}_k|\dots|J_m\} \twoheadrightarrow \{I|J_1|\dots|J_m\},$$

die wir kurz und gut durch $c_0 \mapsto c_1 \twoheadrightarrow c$ bezeichnen, können wir die Reihenfolge der J -Komponenten in c so annehmen, daß $s_1 = 1, s_2 = 2, \dots, s_l = l$ gilt. Durch die Notation \check{J}_k verstehen wir die Streichung der J -Komponente J_k . Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

• $l < m-1$. Dann sind $\alpha(c_0)$ und $\alpha(c_1)$ beide $\underline{0}$ mit der Ausnahme des Unterfalles $k = m$ und $l = m-1$, wenn gilt

$$j_k^{c_0} = j_k^{c_1} = j_k^c \text{ für } k = -1, 0, \dots, m-1$$

wegen $j_{m-1}^c \ni J_m$. Aus diesem Grund gilt $\alpha(c_0) = \alpha(c_1) = (j_{m-2}^c, j_{m-1}^c)$ und (36) bleibt exakt nach Anwendung von α .

• $l = m$. Ist $k \neq m$ so folgt $\alpha(c_0) = \underline{0}$, und weiter gilt $j_0^{c_1} = j_0^c, \dots, j_{k-2}^{c_1} = j_{k-2}^c$ aber $j_{k-1}^{c_1} = j_k^c, \dots, j_{m-1}^{c_1} = j_m^c$, so daß $\alpha(c_1) = (j_{m-2}^{c_1}, j_{m-1}^{c_1}) = (j_{m-1}^c, j_m^c) = \alpha(c)$.

Ist $k = m$ so folgt nach ähnlicher Überlegung

$$\alpha(c_0) = (j_{m-2}^{c_0}, j_{m-1}^{c_0}) = (j_{m-2}^c, j_{m-1}^c), \\ \alpha(c_1) = (j_{m-1}^{c_1}, j_m^{c_1}) = (j_{m-2}^c, j_m^c) \text{ und} \\ \alpha(c) = (j_{m-1}^c, j_m^c),$$

so daß (36) zur exakten Sequenz $(j_{m-2}^c, j_{m-1}^c) \rightarrow (j_{m-2}^c, j_m^c) \rightarrow (j_{m-1}^c, j_m^c)$ wird. □

Der Funktor α induziert mittels des Funktors $\alpha^* = Hom_{ex}(\alpha, \mathcal{C})$ eine Abbildung $\alpha_n \mathcal{C} = \alpha \mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc} KG\mathcal{C}(\underline{n}) & \xleftarrow{\alpha \mathcal{C}} & G\mathcal{C}(\underline{n}), \\ (\alpha^*(\xi_{\pm}); (\mathbf{sub}\alpha)^* \tau_{\xi}) & \xleftarrow{\quad} & (\xi_{\pm}; \tau_{\xi}) \text{ mit} \\ \alpha^*(\xi_{\pm}) : \mathbf{FullCube}_n \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Wald}_{n+1} \xrightarrow{\xi_{\pm}} \mathcal{C} & & \xi_{\pm} : \mathbf{Wald}_{n+1} \xrightarrow{\xi_{\pm}} \mathcal{C} \\ (\mathbf{sub}\alpha)^*(\xi_+ \xleftarrow{\tau_{\xi}} \xi_-) : \mathbf{subFullCube}_n \rightarrow \mathcal{C} & & \xi_+ \xleftarrow{\tau_{\xi}} \xi_- : \mathbf{subWald}_{n+1} \rightarrow \mathcal{C} \end{array}$$

2. Topologische Übersetzungen zwischen geometrischen Realisierungen

2.1. Die nichtausgeartete simplizielle geometrische Realisierung $R^{na} = |\cdot|^{na}$. Sei G eine simplizielle Menge. Die geometrische Realisierung $RG = |G|$ ist ein Quotient des topologischen Raumes $\bigsqcup_{n \geq 0} G(\underline{n}) \times \Delta_n$ modulo der Äquivalenzrelation \sim . (Unterabschnitt 1.5.1.) Ist ξ ausgeartet in $G(\underline{n})$, so identifiziert \sim affin Punkte aus $\{\xi\} \times \Delta_n$ mit Punkten aus $\{\xi'\} \times \Delta_{n'}$ für ein geeignetes **nicht** ausgeartetes Element $\xi' \in G(\underline{n}')^{na}$ mit geeignetem $n' < n$. Aus diesem Grund führen wir folgenden Begriff ein:

DEFINITION 2.1. Die **nichtausgeartete simplizielle geometrische Realisierung** $R^{na} = |\cdot|^{na}$ ist der Funktor von **SimpEns** nach **Top** definiert auf Objekten durch

$$R^{na}G = |G|^{na} := \left(\bigsqcup_{n \geq 0} G(\underline{n})^{na} \times \Delta_n \right) / \sim^{na}.$$

Die Relation \sim^{na} identifiziert zwei Punkte

$$(\xi_i \in G(\underline{n}_i), x_i \in \Delta_{n_i}) \text{ für } i = 1, 2$$

genau dann, wenn eine **injektive** Abbildung $\epsilon : \underline{n}_1 \longrightarrow \underline{n}_2$ in $\underline{\Delta}$ existiert, so daß sich dadurch die Elemente ξ_i und x_i entsprechen:

$$\begin{aligned} G(\underline{n}_1)^{na} \ni \xi_1 &\xleftarrow{G(\epsilon)} \xi_2 \in G(\underline{n}_2)^{na} \\ \Delta_{n_1} \ni x_1 &\xrightarrow{\epsilon_\Delta} x_2 \in \Delta_{n_2}, \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } (G(\epsilon)(\xi_2), x_1) \sim (\xi_2, \epsilon_\Delta(x_1)).$$

Die kanonische Abbildung $|G|^{na} \rightarrow |G|$ ist ein Homeomorphismus in **Top**.

2.2. Die Abbildung $\text{Aff}(\alpha)$ in die vollkubische Realisierung. Sei $\mathbf{f} = \mathbf{f}_n = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ das System der kanonischen Basisvektoren aus \mathbb{R}^{n+1} . Δ_n ist die konvexe Hülle dieser Vektoren.

Sei δ eine maximale, vollständig geordnete Untermenge von $\{0, 1\}^{\times n}$:

$$\delta = \{\delta_0 < \delta_1 < \dots < \delta_n\} \subseteq \{0, 1\}^{\times n} \subseteq [0, 1]^n = \square_n \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Jede solche Untermenge hat $n + 1$ Elemente. Die Zuordnung $e_i \rightarrow \delta_i$ bestimmt eine Abbildung zwischen den konvexen Hüllen $\Delta_n = \text{cof}$ bzw. $\Delta(\delta) := \text{co}\delta$ von \mathbf{f} bzw. δ . Wir bezeichnen durch $\text{aff}(\delta)$ die Verknüpfung:

$$\text{aff}(\delta) : \Delta_n \rightarrow \Delta(\delta) \rightarrow \square_n.$$

Die Darstellung $\square_n = \bigcup_{\delta \subseteq \{0, 1\}^{\times n}} \Delta(\delta)$ ist eine Simplex-Zerlegung. Wir wählen in dieser Zerlegung ein ausgezeichnetes Teil $\Delta(\delta^*)$:

NOTATION 2.2. $\delta^* = \delta_n^*$ ist die vollständig geordnete Menge

$$\begin{aligned} \delta^* &:= \{00 \dots 00 < 00 \dots 01 < 00 \dots 011 < \dots < 01 \dots 11 < 11 \dots 11\} \\ &\subseteq \{0, 1\}^{\times n} \subseteq \square_n \subseteq \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

welche wir auch als Unterkategorie von Baby_n betrachten.

DEFINITION 2.3. Sei \mathcal{C} eine exakte Kategorie. Wir definieren die Abbildung $\text{Aff}(\alpha)$

$$|\mathcal{GC}|^{na} = \left(\coprod_{n \geq 0} \mathcal{GC}(\underline{n})^{na} \times \Delta_n \right) / \sim^{na} \xrightarrow{\text{Aff}(\alpha)} \left(\coprod_{n \geq 0} \mathcal{KGC}(\underline{n}) \times \square_n \right) / \approx = ||\mathcal{KGC}||,$$

als Verklebung von Abbildungen $\text{Aff}(\alpha)_\xi$. Die Abbildungen $\text{Aff}(\alpha)_\xi$ sind gegeben durch die Verknüpfung

$$\{\xi\} \times \Delta_n \cong \Delta_n \xrightarrow{\text{aff}(\delta^*)} \square_n \cong \{\alpha\mathcal{C}(\xi)\} \times \square_n,$$

$$\text{d.h. } \text{Aff}(\alpha)_\xi(\xi, y) := (\alpha\mathcal{C}(\xi), \text{aff}(\delta^*)y).$$

SATZ 2.4. Die Abbildung $\text{Aff}(\alpha)$ ist wohldefiniert.

BEWEIS: Wir müssen die Verträglichkeit der affinen Abbildungen $\text{Aff}(\alpha)_\xi$ mit den Relationen \sim^{na} und \approx von $|\mathcal{GC}|^{na}$ bzw. $||\mathcal{KGC}||$ nachweisen. Jede injektive simpliziale Abbildung läßt sich als Verknüpfung von Abbildungen der Form ϵ_n^j schreiben. Wir betrachten aus diesem Grund den speziellen Fall einer Abbildung $\epsilon := \epsilon_n^j$, und beweisen im folgenden Kontext

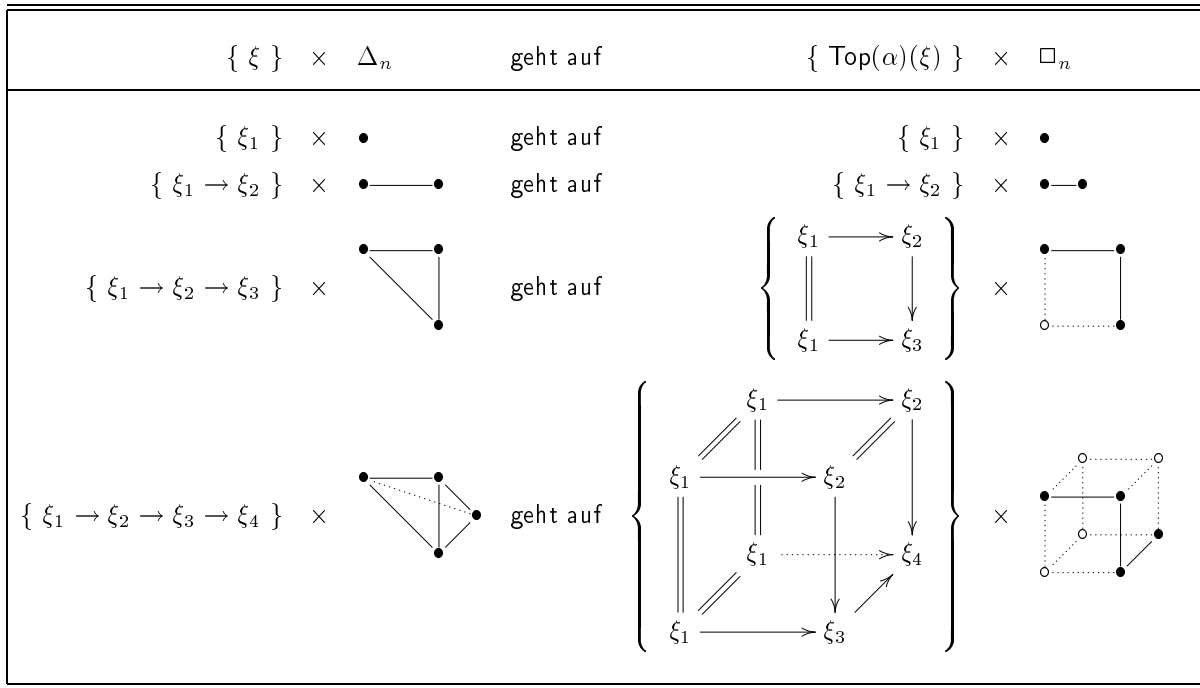
$$\begin{aligned} \underline{n-1} &\xrightarrow{\epsilon := \epsilon^j} \underline{n} \\ \mathcal{GC}(\underline{n-1}) &\xleftarrow{\epsilon^* := \mathcal{GC}(\epsilon)} \mathcal{GC}(\underline{n}) \ni \xi \\ y \in \Delta_{n-1} &\xrightarrow{\epsilon_\Delta} \Delta_n, \end{aligned}$$

daß die Relation $(\epsilon^*(\xi), y) \sim (\xi, \epsilon_\Delta y)$ durch $\text{Aff}(\alpha)$ auf eine Relation abgebildet wird:

$$\text{Aff}(\alpha)_{\epsilon^*(\xi)}(\epsilon^*(\xi), y) = \text{Aff}(\alpha)_\xi(\xi, \epsilon_\Delta y).$$

Wir benutzen kurzfristig die Notationen: $\epsilon := \epsilon^j$ und $d := d^{j, j+1}$. Die kommutativen Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \text{Baby}_{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & \{\underline{0}\} \sqcup \underline{\text{shift}(n-1)} \\ d \downarrow & & \downarrow \{\underline{0}\} \sqcup \underline{\text{shift}(\epsilon)} \\ \text{Baby}_n & \xrightarrow{\alpha} & \{\underline{0}\} \sqcup \underline{\text{shift}(n)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \delta_{n-1}^* & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{f}_{n-1} \\ d \downarrow & & \downarrow \epsilon_\Delta \\ \delta_n^* & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{f}_n \end{array}$$

ABBILDUNG 1. Die Abbildung $\text{Aff}(\alpha)$

haben je eine eindeutige exakte respektive affine Erweiterung:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{FullCube}_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & \text{Wald}_{\text{shift}(n-1)} \\
 \text{FullCube}_d \downarrow & & \downarrow \text{Wald}_{\text{shift}(\epsilon)} \\
 \text{FullCube}_n & \xrightarrow{\alpha_n} & \text{Wald}_{\text{shift}(n)}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \square_{n-1} & \xleftarrow{\text{aff}(\delta_{n-1}^*)} & \Delta_{n-1} \\
 d_\square \downarrow & & \downarrow \epsilon_\Delta \\
 \square_n & \xleftarrow{\text{aff}(\delta_n^*)} & \Delta_n,
 \end{array}$$

Es folgt parallel:

$$\begin{aligned}
 \alpha\mathcal{C}(\epsilon^*(\xi)) &= \alpha_{n-1}^*(\text{Wald}_{\text{shift}(\epsilon)}^*(\xi)) & \text{aff}(\delta^*)(\epsilon_\Delta(y)) &= d_\square \text{aff}(\delta^*)y \\
 &= (\text{FullCube}_d)^*(\alpha_n^*(\xi)) & & \\
 &= d^*(\alpha\mathcal{C}(\xi)) & \text{und schließlich} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Aff}(\alpha)_{\epsilon^*(\xi)}(\epsilon^*(\xi), y) &= (\alpha\mathcal{C}(\epsilon^*(\xi)), \text{aff}(\delta^*)y) = (d^*(\alpha\mathcal{C}(\xi)), \text{aff}(\delta^*)y) \\
 &\approx (\alpha\mathcal{C}(\xi), d_\square \text{aff}(\delta^*)y) \\
 &= (\alpha\mathcal{C}(\xi), \text{aff}(\delta^*)\epsilon_\Delta y) = \text{Aff}(\alpha)_\xi(\xi, \epsilon_\Delta y).
 \end{aligned}$$

□

Wir veranschaulichen die Konstruktion in niedrigen Dimensionen im Bild 1. Dabei ist $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ ein Paar von WALDHAUSEN-Diagrammen, in welcher nur die erste Zeile gekennzeichnet wurde. Quotienten und entsprechende Isomorphismen unter diesen wurden unterdrückt. $(\text{Aff}(\alpha))(\xi)$ ist ein Paar von Würfelndiagrammen $\{0, 1, 2\}^{\times n}$ und wir haben nur den Anteil in $\{0, 1\}^{\times n}$ gezeichnet. Diese Würfelndiagramme sind mit den Quotientendaten und Isomorphismen von ξ entsprechend eindeutig zu erweitern.

Wir haben die Abbildung $\text{Aff}(\alpha)$ mittels der affinen Abbildung $\text{aff}(\delta^*) : \Delta_n \rightarrow \square_n$ definiert. Im nächsten Unterabschnitt wird eine ähnliche Konstruktion dargestellt, welche eine nicht lineare Abbildung $\Delta_n \leftarrow \square_n$ benutzt. Diese Abbildung wurde in [Se] benutzt. In [EMacL] wird die Vaterschaft dieser Abbildung CARTAN angerechnet.

2.3. Die Abbildung $\text{Cartan}(\alpha)$ in die \perp -kubische Realisierung.

DEFINITION 2.5 (Die CARTAN-Abbildung). *Diese ist eine Abbildung $C = \text{Cartan} : \square_n \rightarrow \Delta_n$, $C(x_1, \dots, x_n) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$, wobei:*

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 - x_1 \\ y_1 &= x_1(1 - x_2) \\ &\dots \\ y_{n-1} &= x_1 x_2 \dots x_{n-1}(1 - x_n) \\ y_n &= x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \end{aligned}$$

C ist surjektiv, Homeomorphismus vom Inneren von \square_n zum Inneren von Δ_n und bildet surjektiv den Rand von \square_n auf den Rand von Δ_n ab. Wir bezeichnen durch C^{-1} die inverse Abbildung, welche eine mehrwertige Funktion ist.

DEFINITION 2.6. *Sei \mathcal{C} eine exakte Kategorie. Wir definieren die Abbildung $\text{Cartan}(\alpha)$*

$$|\mathcal{GC}|^{na} = \left(\coprod_{n \geq 0} \mathcal{GC}(\underline{n})^{na} \times \Delta_n \right) / \sim^{na} \xrightarrow{\text{Cartan}(\alpha)} \left(\coprod_{n \geq 0} \mathcal{KG}^\perp \mathcal{C}(\underline{n}) \times \square_n \right) / \approx = \|\mathcal{KG}\mathcal{C}\|^\perp,$$

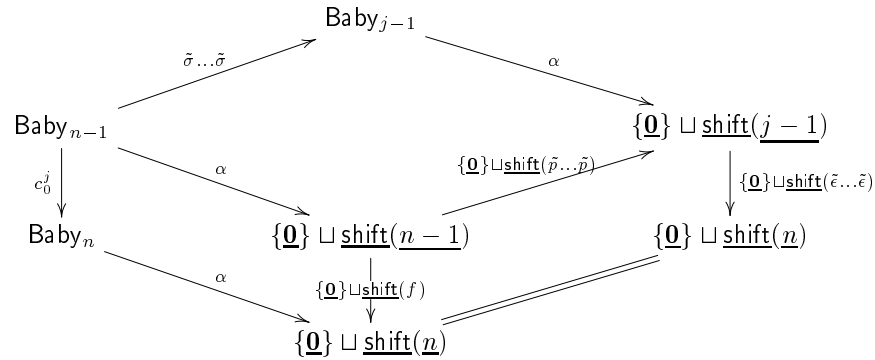
als Verklebung von Abbildungen $\text{Cartan}(\alpha)_\xi$. Die Abbildungen $\text{Cartan}(\alpha)_\xi$ sind gegeben durch die Verknüpfung

$$\begin{aligned} \{\xi\} \times \Delta_n &\cong \Delta_n \xrightarrow{C^{-1}} \square_n \cong \{\alpha\mathcal{C}(\xi)\} \times \square_n, & \text{explizit} \\ (\xi, Cx) &\xrightarrow{\text{Cartan}(\alpha)_\xi} \text{Cartan}(\alpha)_\xi(\xi, Cx) := (\alpha\mathcal{C}(\xi), x). \end{aligned}$$

SATZ 2.7. *Die Abbildung $\text{Cartan}(\alpha)$ ist wohldefiniert.*

BEWEIS:

- *Wohldefiniertheit in Bezug auf die Mehrwertigkeit von C^{-1} :* Seien $x \neq x'$ mit $y = y'$ für $y = Cx$, $y' = Cx'$. Aus $y_0 = y'_0$ folgt $x_1 = x'_1$. Sind diese x -Werte ungleich 0, so folgt aus $y_1 = y'_1$ weiter $x_2 = x'_2$, usw. Es gibt also ein j mit der Eigenschaft: $x_1 = x'_1, \dots, x_{j-1} = x'_{j-1}$, $x_j = x'_j = 0$. Es reicht zu zeigen, daß der Unterwürfel $\{(\alpha\mathcal{C}(\xi), x) : x_j = 0\}$ von $\{\alpha\mathcal{C}(\xi)\} \times \square_n$ für $j < n$ durch \approx zu einem Punkt identifiziert wird.
- *Beschreibung von $\partial_j^0(\alpha\mathcal{C})\xi$:* Das folgende Diagramm kommutiert:



Dabei sind \tilde{p} und $\tilde{\sigma}$ die simpliziale resp. kubische Projektion bzgl. der **letzten** Komponente. ($\tilde{p} : \underline{k} \rightarrow \underline{k-1}$ ist surjektiv und $p(k) = p(k-1)$; $\tilde{\sigma} = \{[1|2] \dots [k-1|\emptyset] : \underline{k} \rightarrow \underline{k-1}$.)

$\tilde{\epsilon}$ ist die **letzte** Inklusion: $\tilde{\epsilon} : \underline{k} \rightarrow \underline{k+1}$ ist injektiv, und $(k+1)$ liegt nicht im Bild von $\tilde{\epsilon}$.

$f : \underline{n-1} \rightarrow \underline{n}$ ist gegeben durch: $f(0) = 0$, $f(1) = 1, \dots, f(j-1) = j-1 = f(j) = \dots = f(n-1)$.

◦ *Die Kontraktion zu einem Punkt:* Es gilt:

$$\begin{aligned} (\alpha\mathcal{C}(\xi), x) &= (\alpha\mathcal{C}(\xi), c_{\square}^j(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)) \\ &\approx (c_0^{j*} \alpha^*(\xi), (x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)) \\ &= ((\tilde{\sigma}^* \dots \tilde{\sigma}^*) \alpha^*(\tilde{\epsilon}^* \dots \tilde{\epsilon}^*)(\xi), (x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)) \\ &\approx (\alpha^*(\tilde{\partial} \dots \tilde{\partial}(\xi)), (\tilde{\sigma}_{\square} \dots \tilde{\sigma}_{\square})(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)) \\ &= (\alpha\mathcal{C}(\tilde{\partial} \dots \tilde{\partial}(\xi)), (x_1, \dots, x_{j-1}, \hat{x}_j, \hat{x}_{j+1}, \dots, \hat{x}_n)) \\ &= (\alpha\mathcal{C}(\tilde{\partial} \dots \tilde{\partial}(\xi)), (x_1, \dots, x_{j-1})) \end{aligned}$$

Ein Hut über einem Symbol bedeutet seine Streichung.

- *Verträglichkeit der Abbildungen $\text{Cartan}(\alpha)_\xi$ mit den Relationen \sim^{na} und \approx von $|\mathcal{GC}|^{na}$ bzw. $||\mathcal{KG}^\perp\mathcal{C}||$:* Wir betrachten den speziellen Fall einer Abbildung $\epsilon^j := \epsilon_n^j$, und beweisen im folgenden Kontext

$$\begin{array}{ccc} \underline{n-1} & \xrightarrow{\epsilon := \epsilon^j} & \underline{n} \\ \mathcal{GC}(\underline{n-1}) & \xleftarrow{\epsilon^{j*} := \mathcal{GC}(\epsilon)} & \mathcal{GC}(\underline{n}) \ni \xi \\ Cx \in \Delta_{n-1} & \xrightarrow{\epsilon_\Delta^j} & \Delta_n, \end{array}$$

daß die Relation $(\epsilon^{j*}(\xi), Cx) \sim (\xi, \epsilon_\Delta^j Cx)$ durch $\text{Cartan}(\alpha)$ auf eine Relation abgebildet wird:

$$\text{Cartan}(\alpha)_{\epsilon^{j*}(\xi)}(\epsilon^{j*}(\xi), Cx) = \text{Cartan}(\alpha)_\xi(\xi, \epsilon_\Delta^j Cx).$$

- Die Gleichheit $\alpha_{c_1^{j+1}} = (\{\underline{0}\} \sqcup \text{shift}(\epsilon^j))\alpha$: Das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \text{Baby}_{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & \{\underline{0}\} \sqcup \text{shift}(\underline{n-1}) \\ c_1^{j+1} \downarrow & & \downarrow \{\underline{0}\} \sqcup \text{shift}(\epsilon^j) \\ \text{Baby}_n & \xrightarrow{\alpha} & \{\underline{0}\} \sqcup \text{shift}(\underline{n}) \end{array}$$

Um dies zu sehen, analysieren wir auf Objekten $*\boxed{0}1 \dots 1 \in \text{Baby}_{n-1}$ das Bild über die zwei möglichen Wege. Wir unterscheiden die Fälle $k < j$ und $k \geq j$. In den folgenden Diagrammen ist in den oberen Zeilen die $(k+1)$ -te Stelle eingerahmt, in den unteren die $(k+1)$ -te respektive die $(k+2)$ -te. Die zusätzlich eingeführte 1 an der Position $j+1$ wurde unterstrichen. Ein beliebiges Wort geeigneter Länge wurde durch * gekennzeichnet. (Verschiedene Positionen von * können verschiedene Werte annehmen.)

$$\begin{array}{ccc} *\boxed{0}11 \dots 1 & \longrightarrow & (0, \text{shift}(k)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ *1*\boxed{0}11 \dots 1 & \longrightarrow & (0, \text{shift}(k)) \\ \text{Der Fall } k < j & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} *\boxed{0}11 \dots 1 & \longrightarrow & (0, \text{shift}(k)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ *\boxed{0}11 \dots \underline{1} \dots 1 & \longrightarrow & (0, \text{shift}(k+1)) \\ \text{Der Fall } k \geq j & & \end{array}$$

- *Übertragung der Relationen:* Die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} \text{Cube}_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & \text{Wald}_{\text{shift}(\underline{n-1})} \\ \text{Cube}_{c_1^{j+1}} \downarrow & & \downarrow \text{Wald}_{\text{shift}(\epsilon^j)} \\ \text{Cube}_n & \xrightarrow{\alpha_n} & \text{Wald}_{\text{shift}(\underline{n})} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \square_{n-1} & \xrightarrow{C} & \Delta_{n-1} \\ c_{1\square}^{j+1} \downarrow & & \downarrow \epsilon_\Delta^j \\ \square_n & \xrightarrow{C} & \Delta_n \end{array}$$

Es folgt parallel:

$$\begin{aligned} (\alpha\mathcal{C})(\epsilon^{j*}\xi) &= \alpha_{n-1}^* \text{Wald}_{\text{shift}(\epsilon^j)}^* \xi \\ &= \text{Cube}_{c_1^{j+1}}^* \alpha_n^* \xi \\ &= (c_1^{j+1})^* (\alpha\mathcal{C})(\xi) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \epsilon_\Delta^j Cx &= C c_{1\square}^{j+1} x \\ &\text{und schließlich} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cartan}(\alpha)_{\epsilon^{j*}(\xi)}(\epsilon^{j*}\xi, Cx) &:= ((\alpha\mathcal{C})(\epsilon^{j*}\xi), x) \\ &= ((c_1^{j+1})^* (\alpha\mathcal{C})(\xi), x) \\ &\approx ((\alpha\mathcal{C})(\xi), c_{1\square}^{j+1} x) \\ &= \text{Cartan}(\alpha)_\xi(\xi, C c_{1\square}^{j+1} x) \\ &= \text{Cartan}(\alpha)_\xi(\xi, \epsilon_\Delta^j Cx) \end{aligned}$$

□

2.4. Zusammenfassung. Wir haben Abbildungen konstruiert: $|\mathcal{GC}| \rightarrow |\mathcal{GC}|^{na} \rightarrow ||\mathcal{KGC}||$ und $|\mathcal{GC}| \rightarrow |\mathcal{GC}|^{na} \rightarrow ||\mathcal{KG}^\perp\mathcal{C}||^\perp$. Diese sind funktoriell in \mathcal{C} . Da $|\mathcal{GC}|$ die K-Theorie berechnet, stellt sich die Frage, ob diese Abbildungen Isomorphismen in der Homotopie-Kategorie sind, äquivalent, ob diese Abbildungen nach Anwendung aller **Homotopie-Funktoren** π_i Gruppen-Isomorphismen liefern. Wir werden diese Frage in dieser Form nicht beantworten.

Unser Zweck ist, Regulatoren zu konstruieren. Diese faktorisieren über die HUREWICZ-Abbildung von der Homotopie der oben erwähnten K-Theorie berechnenden topologischen Räume in die Homologie dieser Räume.

- Wir zeigen, daß die obigen Abbildungen nach Anwendung aller **Homologie–Funktoren** H_i Isomorphismen liefern.
- Die direkte Summe auf \mathcal{C} induziert H–Raum–Strukturen auf $|\mathcal{GC}|$, $||\mathcal{KG}\mathcal{C}||$ und $||\mathcal{KG}^\perp \mathcal{C}||^\perp$, welche verträglich mit den Übersetzungen sind. Wir konstruieren primitive Elemente in der ganzzahligen Homologie von $||\mathcal{KG}^\perp \mathcal{C}||^\perp$.

Nachdem man mit \mathbb{Q} tensoriert, können (rationale) Homotopie–Gruppen mit dem primitiven Anteil von (rationalen) Homologie–Gruppen identifiziert werden. Wir verlieren also keine Information, geht es darum, genügend viele Elemente in den rationalen Homotopie–Gruppen zu konstruieren, um Surjektivitäts–Aussagen von Regulator anzugreifen, welche z.B. in der DELIGNE–BEILINSON– oder in der ZAGIER–Vermutung vorkommen.

3. Algebraische Übersetzungen zwischen Komplexen $\mathbb{Z}[\mathcal{GC}] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{KG}^\perp \mathcal{C}]^{na}$

3.1. Die Abbildung $\mathbb{Z}(\alpha) = \mathbb{Z}[\alpha\mathcal{C}]$. Für eine simplizielle Menge F gibt es einen kanonischen Adjunktion–Morphismus $F \rightarrow S[F]$. Er induziert einen Isomorphismus in der Homologie mit \mathbb{Z} –Koeffizienten: $H(\mathbb{Z}[F]) \rightarrow H(\mathbb{Z}[S[F]])$. Analog für eine kubische Menge.

Die Homologie der Abbildung $|\mathcal{GC}| \rightarrow |\mathcal{GC}|^{na} \rightarrow ||\mathcal{KG}^\perp \mathcal{C}||^\perp$ kann wie folgt zur Komplex–Ebene beschrieben werden:

DEFINITION 3.1. Die Abbildung $\mathbb{Z}(\alpha) = \mathbb{Z}[\alpha\mathcal{C}] : \mathbb{Z}[\mathcal{GC}] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{KG}^\perp \mathcal{C}]^{na}$ ist zuerst als Abbildung zwischen graduerten abelschen Gruppen auf Erzeugenden $[\xi]$ definiert durch:

$$\mathbb{Z}[\alpha\mathcal{C}][\xi] := [(\alpha\mathcal{C})(\xi)] \quad \text{modulo Ausartungen, } \xi \in \mathcal{GC}(\underline{n}),$$

und anschließend auf $\mathbb{Z}[\mathcal{GC}]$ erweitert.

SATZ 3.2. $\mathbb{Z}(\alpha)$ ist eine Komplex–Abbildung.

BEWEIS: Es gilt für ein Basiselement $[\xi] \in \mathbb{Z}[\mathcal{GC}]$:

$$\begin{aligned} d \mathbb{Z}[\alpha\mathcal{C}][\xi] &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\partial_i^1 - \partial_i^0) \mathbb{Z}[\alpha\mathcal{C}][\xi] \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \underbrace{\partial_i^1 \mathbb{Z}[\alpha\mathcal{C}][\xi]}_{\mathbb{Z}[\alpha\mathcal{C}]\partial_{i-1}[\xi]} - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \underbrace{\partial_i^0 \mathbb{Z}[\alpha\mathcal{C}][\xi]}_{\text{ausgartet}} - (-1)^{n-1} \underbrace{\partial_n^0 \mathbb{Z}[\alpha\mathcal{C}][\xi]}_{\mathbb{Z}[\alpha\mathcal{C}]\partial_n[\xi]} \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \mathbb{Z}[\alpha\mathcal{C}]\partial_j[\xi] \\ &= \mathbb{Z}[\alpha\mathcal{C}]d[\xi]. \end{aligned}$$

□

BEMERKUNG 3.3. $\mathbb{Z}(\alpha)$ ist verträglich mit den Koprodukt–Strukturen auf $\mathbb{Z}[\mathcal{GC}]$ und $\mathbb{Z}[\mathcal{KG}^\perp \mathcal{C}]^{na}$.

3.2. Der Unterkomplex $\mathbb{Z}[\mathbf{erw}\mathcal{KG}^\perp \mathcal{C}]^{na}$ von $\mathbb{Z}[\mathcal{KG}^\perp \mathcal{C}]^{na}$.

DEFINITION 3.4. Die \perp –kubische Menge $\mathbf{erw}\mathcal{KG}^\perp \mathcal{C}$ ist die \perp –kubische Untermenge von $\mathcal{KG}^\perp \mathcal{C}$, welche aus Elementen $\xi = (\xi_+, \xi_-, \tau_\xi)$ mit **erwählten** Quotienten–Daten besteht.

$\xi = (\xi_+, \xi_-, \tau_\xi)$ hat **erwählte** Quotienten–Daten, genau dann wenn die Elemente ξ_+ und ξ_- aus $\mathcal{KS}^\perp \mathcal{C}$ es haben.

Ein Element η aus $\mathcal{KS}^\perp \mathcal{C}$ hat **erwählte** Quotienten–Daten, genau dann wenn die folgenden Eigenschaften (i) und (ii) für jedes Objekt A aus $\mathbf{subCube}_n$ gelten:

- η bildet das Objekt A auf ein erwähltes Objekt aus \mathcal{C} ab.
- η bildet den Morphismus $\text{prä}(A) \rightarrow A$ auf einen **erwählten** Epimorphismus. Dabei steht $\text{prä}(A)$ für das Objekt aus \mathbf{Cube}_n , das eindeutig wie folgt charakterisiert ist:
 $\text{prä}(A)$ und A , gesehen in $\{0, 1, 2\}^n$, unterscheiden sich an einer einzigen Stelle. Diese Stelle ist die **erste** Besetzung mit einer 2 für A , und in $\text{prä}(A)$ befindet sich an dieser Stelle eine 1.

Die \perp –kubische Menge $\mathbf{erw}\mathcal{KG}^\perp \mathcal{C}$ ist wohldefiniert, insbesondere haben Ausartungen von Elementen mit erwählten Quotienten–Daten auch erwählte Quotienten–Daten. Genauer:

DEFINITION 3.5. \mathbf{I} ist die einzige Abbildung $\mathcal{KG}^\perp \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{erw}\mathcal{KG}^\perp \mathcal{C}$, welche die Eigenschaft besitzt:

- Sie faktorisiert über $\mathbf{erw}\mathcal{KG}^\perp \mathcal{C}$.
- ξ_\pm und $(\mathbf{I}\xi)_\pm$ stimmen auf $\{0, 1\}^{|\xi|}$ überein.
- $\mathbf{I}\xi$ hat erwählte Quotienten–Daten.

$I\xi$ entsteht also aus ξ durch

- die Übernahme der Objekte und Morphismen von ξ_{\pm} , eingeschränkt auf $\{0, 1\}^{|\xi|}$,
- die Änderung von $\xi_{\pm}(A)$ für jedes A aus **subCube** $_{|\xi|}$ durch das zu $\xi_{\pm}(A)$ isomorphe **erwählte** Objekt aus \mathcal{C} und
- die Anpassung der restlichen Morphismen, indem zuerst für die Pfeile $\text{prä}(A) \rightarrow A$ entsprechende erwählte Morphismen festgelegt, und für die übrigen Pfeile die eindeutigen Faktorisierungen gefunden werden.

NOTATION 3.6. Wir schreiben I auch für die von dem Morphismus I aus der Definition 3.5 induzierten Abbildungen $\mathbb{Z}.[I]^{na} : \mathbb{Z}.[KG^{\perp}\mathcal{C}]^{na} \rightarrow \mathbb{Z}.[KG^{\perp}\mathcal{C}]^{na}$.

SATZ 3.7. Die Abbildungen I und id vom Komplex $\mathbb{Z}.[KG^{\perp}\mathcal{C}]^{na}$ in sich selbst sind homotop.

BEWEIS: Wir definieren eine Homotopie Υ auf Basiselementen: Sei ξ ein Basiselement vom Grad n . Sei

$$\Upsilon(\xi) := [\xi \rightarrow I\xi \rightarrow \boxed{0}] \quad (\text{Darstellung bzgl. der ersten Richtung})$$

das einzige Element vom Grad $(n+1)$ mit

$$\partial_1^0 \Upsilon(\xi) = \xi, \quad \partial_1^0 \Upsilon(\xi) = I\xi \text{ und}$$

$\Upsilon(\xi)(A \rightarrow (A + (1, 0, \dots, 0)))$ i.e. $\xi_{\pm}(A') \rightarrow I\xi(A')$ sind Identitäten für alle $A \in \{0\} \times \{0, 1\}^{\times n}$ resp. $A' \in \{0, 1\}^{\times n}$.

Es gilt für $i \geq 1, a = 0, 1$:

$$\begin{aligned} \partial_{i+1}^a \Upsilon(\xi) &= \partial_{i+1}^a [\xi \rightarrow I(\xi) \rightarrow \boxed{0}] = [\partial_i^a \xi \rightarrow \partial_i^a I(\xi) \rightarrow \boxed{0}] \\ &= [\partial_i^a \xi \rightarrow I(\partial_i^a \xi) \rightarrow \boxed{0}] = \Upsilon(\partial_i^a \xi) \text{ also} \\ d \Upsilon[\xi] + \Upsilon d[\xi] &= \partial_1^1 \Upsilon(\xi) - \partial_1^0 \Upsilon(\xi) - \sum_{i \geq 1} (-1)^{i-1} \Upsilon(\partial_i \xi) + \sum_{i \geq 1} (-1)^{i-1} \Upsilon(\partial_i \xi) \\ &= [I\xi] - [\xi]. \end{aligned}$$

□

3.3. Der Quasiisomorphismus $\mathbb{Z}(\alpha)$. Der Autor möchte diesem Abschnitt eine große Bedeutung beimessen. Aus diesem Grund wird der Beweis des folgenden Theorems trotz, wegen und dank der Kompliziertheit in Notation zuerst detailliert in den Sonderfällen niedriger Dimension erläutert, um den allgemeinen Fall zu motivieren und die Beweisidee zu verdeutlichen.

THEOREM 3.8. $\mathbb{Z}(\alpha)$ ist ein Quasiisomorphismus.

BEWEIS: Wir betrachten nur solche Zykeln von $\mathbb{Z}.[KG^{\perp}\mathcal{C}]^{na}$, welche durch die Homotopie zur Identität I aus $\mathbb{Z}.[\text{erw}KG^{\perp}\mathcal{C}]^{na}$ stammen. Dadurch können wir die Wahl der Quotienten-Daten in einem Paar von Würfeln ausdrücken, wodurch auch eine Entlastung der Notation erreicht wird. Wir werden formal Quotienten-Daten durch "quot" stillschweigend bezeichnen, eventuell wird eine Indizierung vorgenommen, um Quotienten-Daten zu unterscheiden.

Wir führen eine absteigende Filtration Fil auf $\mathbb{Z}.[KG^{\perp}\mathcal{C}]^{na}$:

Fil^0 ist der ganze Komplex.

Fil^k ist induktiv erzeugt von Basiselementen $[\xi]$ mit den Eigenschaften:

- $\partial_1^0 \xi$ ist **total** ausgeartet, und
- $\partial_1^1 \xi$ befindet sich in Fil^{k-1} . Es gilt $\partial_j^0 \text{Fil}^k \subseteq \text{Fil}^k$ und $\partial_j^1 \text{Fil}^k \subseteq \text{Fil}^{k-1}$.

Für ein Basiselement $[\xi]$ und $A \in \square_{|\xi|}$ sei $\xi(A)$ das Paar $(\xi_+(A), \xi_-(A)) \in KG_0^{\perp}\mathcal{C}$. Wir bezeichnen durch $\text{aus } \xi(A) = \text{aus}_n \xi(A)$ das total ausgeartete Element $KG^{\perp}\mathcal{C}(\sigma^{\circ(n)}) \xi(A)$ aus $KG_n^{\perp}\mathcal{C}$, wobei $\sigma^{\circ(n)}$ die einzige Abbildung $\underline{n} \rightarrow \underline{0}$ ist.

Sei nun ξ ein Basiselement vom Grad $n \geq 2$ im k -ten Filtrationsschritt (mit erwählten Quotienten-Daten). Ist $k \geq n-1$, so befindet sich ξ im Bild von $\mathbb{Z}(\alpha)$.

Wir können also $k \leq n-2$ annehmen und zeigen, daß eine homotopische Modifikation von ξ in Fil^{k+1} liegt. Damit wäre das Theorem durch endliche Induktion nach k bewiesen, denn $\mathbb{Z}(\alpha)$ bildet injektiv die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}[\mathcal{GC}]^{na}$ ab.

Wir arbeiten mit folgenden Objekten:

$T = \{1, \dots, n\}$ ist die "totale" Indexmenge.

$J = (j_1, j_2, \dots, j_s)$ ist ein s -Tupel von Indizes aus T . (Insbesondere ist ihre Reihenfolge wichtig.)

$\Phi_s(\xi)$ ist die formale Summe $\sum_{|J|=s} \Phi(J, \xi)$, wobei wir gekürzt haben:

$\Phi(J, \xi)$ ist das Basiselement vom Grad $(n+1)$ definiert durch:

$$\Phi(J, \xi) := \alpha \mathcal{D} \text{ Erw } [\text{aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{j_1}) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{j_1} + e_{j_2}) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{aus } \xi(e_J) \rightarrow \partial_{[J, T]} \xi]$$

mit folgenden Vereinbarungen:

- $e_{j_1}, \dots, e_{j_s} \in [0, 1]^n = \square_n$ sind entsprechende kanonische Basisvektoren von \mathbb{R}^n .
- $\partial_{[J, T]} \xi$ hat Grad $(n-s)$ und "aus $\xi(e_{j_1} + \cdots + e_{j_t})$ " steht für das **total** ausgeartete Element vom gleichen Grad $(n-s)$. ("aus" steht für "aus $_{n-s}$ ".)

• Wir betrachten $[\text{aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{j_1}) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{j_1} + e_{j_2}) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{aus } \xi(e_J) \rightarrow \partial_{[J, T]} \xi]$ als ein Paar von unvollständigen WALDHAUSEN-Diagrammen aus $\mathbf{G}_{s+1} \mathcal{D}$. Die exakte Kategorie \mathcal{D} hat

Objekte: exakte (Paare von) Funktoren von Cube_{n-s} nach \mathcal{C} (mit erwählten Quotienten-Daten),

Morphismen: natürliche Transformationen zwischen solchen Funktoren.

Eine kurzexakte Sequenz in \mathcal{D} ist der Form $A \rightarrow B \rightarrow C$, falls diese, aufgefaßt als Funktor $[\text{Cube}_{(n-s)+1} \rightarrow \mathcal{C}]$, ein Element von $\mathbf{KG}_{(n-s)+1}^\perp \mathcal{C}$ (mit erwählten Quotienten-Daten) ergibt.

Die Morphismen $\text{aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{j_1})$, $\text{aus } \xi(e_{j_1}) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{j_1} + e_{j_2})$, \dots sind natürlich induziert von den Morphismen $\xi(0 \rightarrow e_{j_1})$, $\xi(e_{j_1} \rightarrow (e_{j_1} + e_{j_2}))$, \dots

• $e_J := e_{j_1} + e_{j_2} + \cdots + e_{j_s}$ und $(\partial_{[J, T]} \xi)(0) = \xi(e_J)$. Wir wählen den Morphismus $\text{aus } \xi(e_J) \rightarrow \partial_{[J, T]} \xi$ so, daß er, ausgewertet in 0, die Identität von $\xi(e_J)$ ergibt.

• **Erw** steht für die **Erweiterung** mit **erwählten** Quotienten-Daten der unvollständigen WALDHAUSEN-Diagrammen:

$$(37) \quad \text{Erw } [\text{aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{j_1}) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{j_1} + e_{j_2}) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{aus } \xi(e_J) \rightarrow \partial_{[J, T]} \xi]$$

$$= \left[\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{j_1}) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{j_1} + e_{j_2}) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{aus } \xi(e_J) \rightarrow \partial_{[J, T]} \xi \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ 0 \rightarrow \text{aus } \xi(2e_{j_1}) \rightarrow \text{aus } \xi(2e_{j_1} + e_{j_2}) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{aus } \xi(e_{j_1} + e_J) \rightarrow \frac{\partial_{[J, T]} \xi}{\text{aus } \xi(0)} \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array} \right]$$

Für weitere Berechnungen zerlegen wir das Differential d auf $\mathbb{Z}[\mathbf{KG}^\perp \mathbf{C}]$ in zwei Teile, um eine Anpassung zur weiteren Ableitung von Elementen im Bild von Φ_s zu leisten:

$$d = \partial'_{(s)} + \partial''_{(s)}, \quad \text{wobei sich das Teil-Differential} \\ \partial'_{(s)} = (\partial_1^1 - \partial_1^0) - (\partial_2^1 - \partial_2^0) + \cdots + (-1)^s (\partial_{s+1}^1 - \partial_{s+1}^0)$$

auf die ersten $(s+1)$ Richtungen bezieht. Eine explizite Beschreibung von Φ_0 auf Basiselementen ist:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\xi) &= \Phi(\emptyset, \xi) = \alpha \mathcal{D} \text{ Erw } [\text{aus } \xi(0) \rightarrow \xi] = \alpha \mathcal{D} \left[\begin{array}{ccc} \text{aus } \xi(0) & \longrightarrow & \xi \\ & & \downarrow \\ & & \text{quot} \end{array} \right] \\ &= [\text{aus } \xi(0) \rightarrow \xi \rightarrow \text{quot}] \quad (\text{Darstellung nach erster Richtung.}) \end{aligned}$$

Φ_0 ist eine erste Approximation zu einer Homotopie-Abbildung. Für die genaue Aussage berechnen wir:

$$\begin{aligned}
& d\Phi_0(\xi) + \Phi_0(d\xi) \\
&= \partial'_{(0)} \Phi_0(\xi) + \partial'_{(0)} \Phi_0(\xi) + \Phi_0(d\xi) \\
&= [\xi] - \sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} (\partial_{j+1}^1 \Phi_0(\xi) - \partial_{j+1}^0 \Phi_0(\xi)) + \sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} (\Phi_0(\partial_j^1 \xi) - \Phi_0(\partial_j^0 \xi)) \\
&= [\xi] + \sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} (\Phi_0(\partial_j^1 \xi) - \partial_{j+1}^1 \Phi_0(\xi)) \\
&\quad \text{da } \partial_{j+1}^0 \Phi_0(\xi) = \Phi_0(\partial_j^0 \xi) = \alpha \mathcal{D} \text{ Erw[aus } \xi(0) \rightarrow \partial_j^0 \xi] , \\
&= [\xi] + \sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} \{ \alpha \mathcal{D} \text{ Erw[aus } \xi(e_j) \rightarrow \partial_j^1 \xi] - \alpha \mathcal{D} \text{ Erw[aus } \xi(0) \rightarrow \partial_j^1 \xi] \} \\
&= [\xi] + \sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} \alpha \mathcal{D} d \text{ Erw[aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_j) \rightarrow \partial_j^1 \xi] \\
&= [\xi] + \partial'_{(1)} \sum_{|J|=1} \epsilon(J, T \setminus J) \alpha \mathcal{D} \text{ Erw[aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_J) \rightarrow \partial_{[J,T]} \xi] \quad (\text{für } J := \{j\}) \\
&= [\xi] + \partial'_{(1)} \Phi_1(\xi) .
\end{aligned}$$

Wir untersuchen nun den Störterm $\partial'_{(1)} \Phi_1(\xi)$ **modulo Termen im $(k+1)$ -Filtrationsschritt Fil^k** . Die Ableitungen ∂_i^0 verschlechtern **nicht** den Filtrationsgrad. Die Abbildung Φ_s verbessert den Filtrationsgrad um 1 (und erhöht auch den Grad um 1). Aus diesem Grund vernachlässigen wir die Ableitungen ∂_i^0 in den folgenden Berechnungen und arbeiten modulo Fil^{k+1} .

$$\begin{aligned}
& d\Phi_1(\xi) + \Phi_1(d\xi) \\
&= \partial'_{(1)} \Phi_1(\xi) + \partial''_{(1)} \Phi_1(\xi) + \Phi_1(d\xi) \\
&\equiv \partial'_{(1)} \Phi_1(\xi) + \sum_{j \in T} \epsilon(j, T \setminus j) \partial''_{(1)} \Phi(\{j\}, \xi) + \sum_{j \in T} \epsilon(j, T \setminus j) \Phi_1(\partial_j^1 \xi) \\
&= \partial'_{(1)} \Phi_1(\xi) + \sum_{j \in T} \epsilon(j, T \setminus j) \sum_{k \in T \setminus j} \epsilon(k, T \setminus \{j, k\}) \alpha \mathcal{D} \text{ Erw[aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_k) \rightarrow \partial_{[\{j,k\},T]} \xi] \\
&\quad + \sum_{j \in T} \epsilon(j, T \setminus j) \sum_{k \in T \setminus j} \epsilon(k, T \setminus \{j, k\}) \alpha \mathcal{D} \text{ Erw[aus } \xi(e_j) \rightarrow \text{aus } \xi(e_j + e_k) \rightarrow \partial_{[\{j,k\},T]} \xi] \\
&= \partial'_{(1)} \Phi_1(\xi) + \sum_{j \neq k \in T} \epsilon((j, k), T \setminus \{j, k\}) \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \mathcal{D} \text{ Erw[aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_j) \rightarrow \partial_{[\{j,k\},T]} \xi] \\ \alpha \mathcal{D} \text{ Erw[aus } \xi(e_j) \rightarrow \text{aus } \xi(e_j + e_k) \rightarrow \partial_{[\{j,k\},T]} \xi] \end{array} \right\} \\
&\quad \text{da } \epsilon(j, T \setminus j) \epsilon(k, T \setminus \{j, k\}) = \text{sign}(T \rightarrow j \sqcup (T \setminus j) \rightarrow j \sqcup k \sqcup (T \setminus \{j, k\})) \\
&= \partial'_{(1)} \Phi_1(\xi) + \sum_{J=(j,k)} \epsilon(J, T \setminus J) \\
&\quad \alpha \mathcal{D} \text{ Erw} \left\{ \begin{array}{l} d [\text{aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_j) \rightarrow \text{aus } \xi(e_j + e_k) \rightarrow \partial_{[J,T]} \xi] \\ + [\text{aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_j + e_k) \rightarrow \partial_{[J,T]} \xi] \end{array} \right\} \\
&\quad \text{Der untere Term verschwindet wegen alternierenden Charakters in } j, k. \\
&= \partial'_{(1)} \Phi_1(\xi) + \sum_{|J|=2} \epsilon(J, T \setminus J) \partial'_{(2)} \Phi(J, \xi) \\
&= \partial'_{(1)} \Phi_1(\xi) + \partial'_{(2)} \Phi_2(\xi) .
\end{aligned}$$

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}
& d\Phi_s(\xi) + \Phi_s(d\xi) \\
&= \partial'_{(s)} \Phi_s(\xi) + \partial''_{(s)} \Phi_s(\xi) + \Phi_s(d\xi) \\
&\equiv \partial'_{(s)} \Phi_s(\xi) + \partial''_{(s)} \sum_{|J|=s} \epsilon(J, T \setminus J) \Phi(J, \xi) + \sum_{k \in T} \epsilon(k, T \setminus k) \Phi_s(\partial_k^1 \xi) \\
&= \partial'_{(s)} \Phi_s(\xi) + (-1)^{s+1} \sum_{|J|=s} \epsilon(J, T \setminus J) \sum_{i \in T \setminus J} \epsilon(i, T \setminus (J \cup i)) \\
&\quad \alpha \mathcal{D} \text{ Erw} [\text{aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{j_1}) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{aus } \xi(e_J) \rightarrow \underbrace{\partial_{[i, T \setminus J]} \partial_{[J, T]} \xi}_{\partial_{[J \cup i, T]}}] \\
&\quad + \sum_{k \in T} \epsilon(k, T \setminus k) \sum_{J' \subseteq T \setminus k, |J'|=s} \epsilon(J', T \setminus (k \cup J')) \\
&\quad \alpha \mathcal{D} \text{ Erw} [\text{aus } \underbrace{(\partial_k^1 \xi)(0)}_{\xi(e_k)} \rightarrow \text{aus } \underbrace{(\partial_k^1 \xi)(e_{j_1})}_{\xi(e_{k, j_1})} \rightarrow \cdots \rightarrow \text{aus } \underbrace{(\partial_k^1 \xi)(e_{J'})}_{\xi(e_{k \cup J'})} \rightarrow \underbrace{\partial_{[J', T \setminus k]} \partial_k^1 \xi}_{\partial_{[k \cup J', T]}}]
\end{aligned}$$

Die Vorzeichen in den obigen Doppelsummen sind

$$\epsilon(J, T \setminus J) \epsilon(i, T \setminus (J \cup i)) = \text{sign}(T \rightarrow J \sqcup (T \setminus J) \rightarrow J \sqcup i \sqcup (T \setminus (J \cup i)))$$

und sei $I := J \sqcup i$, also insbesondere $i_{s+1} := i$, und

$$\epsilon(k, T \setminus k) \epsilon(J', T \setminus (k \cup J')) = \text{sign}(T \rightarrow k \sqcup (T \setminus k) \rightarrow k \sqcup J' \sqcup (T \setminus (k \cup J')))$$

und sei $I := k \sqcup J'$, also insbesondere $i_1 := k$. Wir setzen die Berechnung fort:

$$\begin{aligned}
&= \partial'_{(s)} \Phi_s(\xi) \\
&+ (-1)^{s+1} \sum_{|I|=s+1} \epsilon(I, T \setminus I) \\
&\quad \alpha \mathcal{D} \text{ Erw} [\text{aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{i_1}) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{i_1, i_2}) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{aus } \xi(e_{i_1, \dots, i_s}) \rightarrow \partial_{[I, T]} \xi] \\
&\quad + \sum_{|I|=s+1} \epsilon(I, T \setminus I) \\
&\quad \alpha \mathcal{D} \text{ Erw} [\text{aus } \xi(e_{i_1}) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{i_1, i_2}) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{aus } \xi(e_{i_1, \dots, i_s}) \rightarrow \text{aus } \xi(e_I) \rightarrow \partial_{[I, T]} \xi] \\
&= \partial'_{(s)} \Phi_s(\xi) \\
&+ \sum_{|I|=s+1} \epsilon(I, T \setminus I) \alpha \mathcal{D} \text{ Erw} \left\{ \begin{aligned} & d [\text{aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{i_1}) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{aus } \xi(e_I) \rightarrow \partial_{[I, T]} \xi] \\ & + \sum_{1 \leq t \leq s} (-1)^t [\text{aus } \xi(0) \rightarrow \cdots \rightarrow \overbrace{\text{aus } \xi(e_{i_1, \dots, i_t})}^v \rightarrow \cdots \rightarrow \partial_{[I, T]} \xi] \end{aligned} \right\} \\
&= \partial'_{(s)} \Phi_s(\xi) + \sum_{|I|=s+1} \epsilon(I, T \setminus I) \partial'_{(s+1)} \alpha \mathcal{D} \text{ Erw} [\text{aus } \xi(0) \rightarrow \text{aus } \xi(e_{i_1}) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{aus } \xi(e_I) \rightarrow \partial_{[I, T]} \xi] \\
&= \partial'_{(s)} \Phi_s(\xi) + \partial'_{(s+1)} \Phi_{s+1}(\xi) .
\end{aligned}$$

Der formale Superkommutator, angewandt auf $\text{Fil}^k \mathbb{Z}[\text{KG}_n^\perp \mathcal{C}]$ und berechnet modulo Fil^{k+1} , ist also:

$$\begin{aligned}
& [d, \Phi_s](\xi) \equiv \partial'_{(s)} \Phi_s(\xi) + \partial'_{(s+1)} \Phi_{s+1}(\xi) , \quad \text{woraus folgt:} \\
& [d, \Phi_0 - \Phi_1 + \cdots \pm \Phi_{k+1}](\xi) \equiv \{ \partial'_{(0)} \Phi_0 + \partial'_{(1)} \Phi_1 \}(\xi) - \cdots \pm \{ \partial'_{(k+1)} \Phi_{k+1} + \partial'_{(k+2)} \Phi_{k+2} \}(\xi) \\
& \quad = \partial'_{(0)} \Phi_0(\xi) \pm \partial'_{(k+2)} \Phi_{k+2}(\xi) \\
& \quad \equiv \partial'_{(0)} \Phi_0(\xi) \\
& \quad = [\xi] .
\end{aligned}$$

□

4. Zusammenfassung

Die ganzzahligen Homologie-Gruppen der Räume $|\mathcal{G}\mathcal{C}|$ und $||\text{KG}_n^\perp \mathcal{C}||$ stimmen überein als Koalgebra-Objekte in der Kategorie der \mathbb{Z} -Moduln. Diese Übereinstimmung ist gegeben nach kohomologischem Übergang durch die Homotopie-Äquivalenz $\mathbb{Z}(\alpha)$, und eine weitere Übersetzung dieser Komplexe ist möglich, wie folgende Verkettung

von Morphismen zeigt:

$$(38) \quad \mathbb{Z}[\mathbf{G.C}] \xrightarrow{\mathbb{Z}(\alpha)} \mathbb{Z}[\mathbf{KG}^\perp \mathbf{C}]^{na} \longrightarrow \mathbb{Z}\mathbf{K}^{[0,2]}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}\mathbf{K}(\mathbf{C}) .$$

Im nächsten Abschnitt werden wir **partiell** einen kategoriellen Rahmen für eine gewünschte Zielkategorie finden, welche einem motivischen Formalismus nahe kommt, und welche die (einfachsten Quotienten der) Objekte aus (38) beinhaltet. Im zweiten Teil der Arbeit konstruieren wir Abbildungen, welche vom Komplex $\mathbb{Z}\mathbf{K}(\mathbf{C})$ ausgehen und Werte in Komplexen annehmen, welche bekannte Kohomologie–Theorien berechnen. Diese Abbildungen werden zusätzlich mit den kanonischen (auf $\mathbb{Z}\mathbf{K}(\mathbf{C})$ nicht K–theoretischen) Produkt–Strukturen verträglich sein.

Geometrische und absolute Kohomologie–Theorien

Wir geben im ersten Abschnitt eine kurze Skizze über geometrische und absolute Kohomologie–Theorien exklusiv als Motivation für die Suche einer geeigneten triangulierten Kategorie, in welche Funktoren von einer gewissen Kategorie von Varietäten landen.

Wir haben im Vorfeld z.B. im Falle der Bar–Konstruktion bemerkt, daß einem Körper ein (homotopie–)multiplikativer Komplex zugeordnet wird, welcher zusätzlich eine Komultiplikation kanonisch erbt.

Es stellt sich natürlich die Frage, ob und wie sich eine (Ober–)Kategorie von Bialgebra– oder HOPF–Algebra–Objekten in der Homotopie–Kategorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ einer abelschen Kategorie \mathcal{A} im Rahmen einer triangulierten Struktur organisieren läßt.

Wir beantworten diese Frage in den weiteren Abschnitten dieses Kapitels.

1. Geometrische und absolute Kohomologie–Theorien

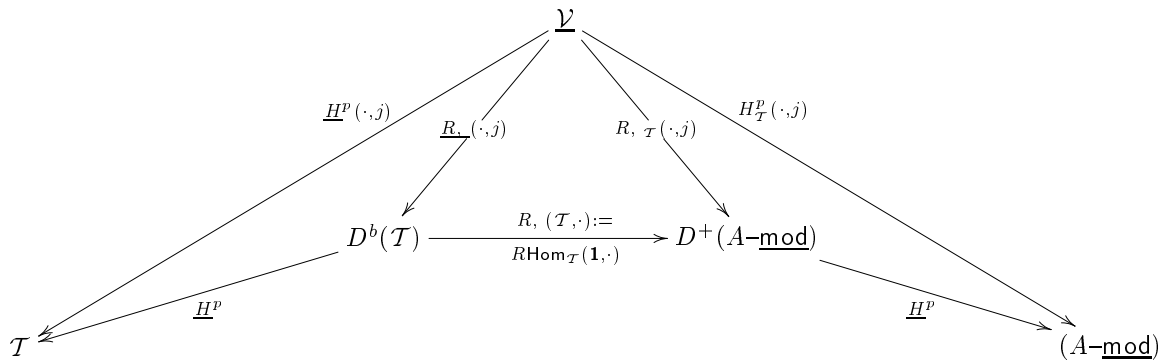
Die philosophische Einleitung zu diesem Kapitel inspiriert sich ausschließlich von der Darstellung aus dem 3. Abschnitt in [Ne].

Sei \mathcal{V} eine geeignete Kategorie von Schemata über einem festen Körper F . Unter geeignet verstehen wir folgende Einschränkungen und Mindestanforderungen:

- \mathcal{V} bestehe aus Schemata vom endlichen Typ über dem Körper F .
- \mathcal{V} beinhalte alle quasiprojektiven, glatten Varietäten über F .

Ein Formalismus von geometrischen und arithmetischen (oder absoluten) Kohomologiegruppen nach BEINLINSON besteht aus Daten, die wir am einfachsten im folgenden Diagramm subsummieren:

(39)



Wir beschreiben nun die Objekte des obigen Diagramms:

- \mathcal{T} ist eine abelsche Tensorcategory mit einem Formalismus von TATE Twist–Funktoren: $\cdot \longrightarrow \cdot(j)$. Sei $\mathbf{1}$ das neutrale Element bezüglich des Tensorproduktes \otimes .
- A ist der Ring der Endomorphismen der Eins: $A := \text{End}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1})$.
- Der Funktor $, (\mathcal{T}, \cdot) := \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}, \cdot) : \mathcal{T} \longrightarrow (A\text{-mod})$ induziert einen Funktor zwischen derivierten Kategorien, den wir auch mit:

$$R, (\mathcal{T}, \cdot) := R\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}, \cdot) : D^b(\mathcal{T}) \longrightarrow D^+(A\text{-mod})$$

bezeichnen.

- $R_.,(\cdot, j) : \mathcal{V} \longrightarrow D^b(\mathcal{T})$ ist ein kontravarianter Funktor. Er erfüllt $R_.,(\cdot, j) = R_.,(\cdot, 0)(j)$, damit die Notation konsistent ist.
- $R, \mathcal{T}(\cdot, j)$ ist die Verknüpfung der Funktoren $R\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}, \cdot)$ und $R_.,(\cdot, j)$, wie es das Diagramm zeigt.
- H bezeichne den Funktor, der einem Objekt aus der derivierten Kategorie die Kohomologie zuordnet. Wir werden ihn auch den Funktor des kohomologischen Übergangs nennen. Der Funktor H^p berechnet die Kohomologie an der p -ten Stelle.

- Nimmt man die Kohomologie der bereits vorgekommenen Klassen von Komplexen aus den entsprechenden derivierten Kategorien, so entstehen zwei Kohomologietheorien:

$$\underline{H}^p(\cdot, j) := \underline{H}^p \circ \underline{R}_\bullet(\cdot, j) \quad \text{geometrische Kohomologiegruppen}$$

$$H_{\mathcal{T}}^p(\cdot, j) := \underline{H}^p \circ R_{\mathcal{T}}(\cdot, j) \quad \text{arithmetische oder absolute Kohomologiegruppen}$$

Wir haben dabei die Terminologie von BEILINSON verwendet. Die arithmetischen und geometrischen Kohomologiegruppen sind durch die Spektralsequenz verbunden:

$$\text{Ext}_{\mathcal{T}}^p(\mathbf{1}, \underline{H}^p(X, j)) \Longrightarrow H_{\mathcal{T}}^{p+q}(X, j) ,$$

die der Relation $R_{\mathcal{T}}(X, j) = R\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}, X) \circ \underline{R}_\bullet(X, j)$ entspricht.

Wir geben nun zwei typische **Beispiele** für diesen Formalismus:

1.1. Étale Kohomologie. n sei prim zur Charakteristik des Körpers F .

\mathcal{T} sei die Kategorie der endlichen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[G]$ -Moduln, wobei $G := \text{Gal}(\overline{F}^{\text{sep}}|F)$. Dann sind:

$$\mathbf{1} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(0), \quad A = \text{End}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ und}$$

$$R^p_{\mathcal{T}}(\cdot) = H^p(G, \cdot)$$

Die geometrische Seite hat die Kohomologiegruppen, welche nach dem funktoriellen Pull-Back von $\text{Spec } F$ zu $\text{Spec } \overline{F}^{\text{sep}}$ berechnet werden:

$$\underline{H}^p(X, j) := H^p \left((X \times_F \overline{F}^{\text{sep}})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right) (j)$$

Die arithmetischen (oder absoluten) Kohomologiegruppen sind gegeben durch direkte Berechnung in dem étalen Situs über X :

$$H_{\mathcal{T}}^p(X, j) := H^p(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})(j) .$$

Ist F sogar endlich erzeugt über \mathbb{Q} , so existiert auch das l -adische Pendant. Die l -adische Kohomologie über F ist dabei als *kontinuierliche* étale Kohomologie definiert. In diesem Fall geht es um folgende Struktur:

$$\mathcal{T} := (\mathbb{Q}_l[G]\text{-mod} ; \text{endlich}). \text{ Dabei ist } G := \text{Gal}(\overline{F}^{\text{sep}}|F).$$

$$\mathbf{1} = \mathbb{Q}_l(0),$$

$$A = \mathbb{Q}_l \text{ und}$$

$$\underline{H}^p(X, j) := H^p \left((X \times_F \overline{F}^{\text{sep}})_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_l \right) (j) ,$$

$$H_{\mathcal{T}}^p(X, j) := H^p(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_l)(j) .$$

1.2. Reelle gemischte HODGE-Strukturen. Sei nun $F = \mathbb{C}$, und X sei ein komplexes Schema vom endlichen Typ.

Sei $\mathcal{MH}_{\mathbb{R}}$ die abelsche Kategorie der reellen gemischten HODGE-Strukturen. In [Be2] führt BEILINSON einen Komplex

$$\underline{R}_\bullet(X, 0) \in \text{Ob } D^b(\mathcal{MH}_{\mathbb{R}})$$

ein, dessen Kohomologie mit der BETTI-Kohomologie der komplexen Mannigfaltigkeit $X(\mathbb{C})$ übereinstimmt, so daß sie als Objekt aus $D^b(\mathcal{MH}_{\mathbb{R}})$ mit der von DELIGNE beschriebenen gemischten HODGE-Struktur versehen ist:

$$\underline{H}^p(\underline{R}_\bullet(X, 0)) = H_B^p(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \in \text{Ob } \mathcal{MH}_{\mathbb{R}} .$$

2. Triangulierte Kategorien

2.1. Additive Kategorien.

DEFINITION 2.1 (Additive Kategorien). *Sei \mathcal{A} eine Kategorie. Diese Kategorie sei mit den Daten versehen und erfülle die Eigenschaften, welche in den folgenden Axiomen festgelegt sind:*

ADD 1 : *Für jede zwei Objekte A, B aus \mathcal{A} ist die Menge der Homomorphismen $\mathcal{A}[A \rightarrow B]$ mit einer Addition $+$ als Teil der Struktur versehen,*

$$(\mathcal{A}[A \rightarrow B], +) ,$$

so daß $(\mathcal{A}[A \rightarrow B], +)$ eine abelsche Gruppe ist. Die Verknüpfung in \mathcal{A} von Morphismen ist links- und rechts-distributiv bzgl. $+$:

Wenn alle folgenden Verknüpfungen von Morphismen wohldefiniert sind, so gilt für beliebige Morphismen f ; g_1, g_2 ; h :

$$f \circ (g_1 + g_2) = (f \circ g_1) + (f \circ g_2) , \quad (g_1 + g_2) \circ h = (g_1 \circ h) + (g_2 \circ h) .$$

ADD 2 : Es gibt ein Objekt 0 in \mathcal{A} , so daß $\mathcal{A}[0 \rightarrow 0]$ die triviale abelsche Gruppe ist. Morphismen, welche durch 0 faktorisieren, bezeichnen wir formal auch durch 0 . (Notations-Mißbrauch. Insbesondere werden z.B. das Objekt 0 und die Identität von 0 durch das gleiche Symbol bezeichnet.)

ADD 3 : Für jede zwei Objekte A, B in \mathcal{A} existiert ein kommutatives Diagramm in \mathcal{A} :

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & B \\ & \searrow i_A & & \swarrow i_B & \\ & & X & & \\ & \swarrow p_A & & \searrow p_B & \\ A & & & & B \end{array}$$

so daß zusätzlich gilt:

$$p_B \circ i_A = 0 , \quad p_A \circ i_B = 0 , \quad i_A p_A + i_B p_B = id_X .$$

Das Objekt X ist bis auf Isomorphismus bestimmt. Er ist gleichzeitig (eine) direkte Summe und (ein) direktes Produkt von A, B in \mathcal{A} . Eine Wahl eines solchen Objekts X bezeichnen wir auch durch $A \oplus B$.

2.2. Triangulierte Kategorien.

DEFINITION 2.2 (Verschiebungs-, Translations-Funktor). Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie. Ein additiver Funktor $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ist ein **Translations-Funktor**, falls es einen additiven Funktor $T^{-1} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ gibt, so daß $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = (\text{Identitäts-Funktor auf } \mathcal{A})$.

Wir bezeichnen oft den Funktor T^n auf Objekten durch $A \rightarrow T^n A =: A[n]$ und auf Morphismen $f : A \rightarrow B$ in \mathcal{A} durch $(T^n f : T^n A \rightarrow T^n B) =: (f[n] : A[n] \rightarrow B[n])$.

DEFINITION 2.3 (Triangel, Dreiecke). Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie mit einem Translations-Funktor T . Die Kategorie $\mathcal{TR}(\mathcal{A})$ der **Triangel** in \mathcal{A} hat:

Objekte: Diagramme in \mathcal{A} der Form

$$(40) \quad A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[1] , \text{ welche wir auch als } \begin{array}{ccc} & C & \\ [1] \nearrow w & & \nwarrow v \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

bezeichnen. Dabei steht $C \xrightarrow{[1]} A$ (oder des weiteren einfach $C \longrightarrow A$) für einen Morphismus $C \rightarrow A$ "vom Grad Eins", d.h. für einen Morphismus $C \rightarrow A[1]$ in \mathcal{A} .

Wir sprechen das Objekt aus (40) als $(A, B, C; u, v, w)$ an, oder – wenn unmißverständlich – auch als $\Delta[ABC]$ oder (A, B, C) .

Morphismen: Die Menge der Morphismen zwischen $(A, B, C; u, v, w)$ und $(A', B', C'; u', v', w')$ besteht aus Diagrammen in \mathcal{A} der Form

$$(41) \quad \begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & A[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & f[1] \downarrow \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \xrightarrow{w'} & A'[1] \end{array}$$

Wir schreiben auch $(f, g, h) \in \mathcal{TR}(\mathcal{A}) [(A, B, C; u, v, w) \rightarrow (A', B', C'; u', v', w')]$ für den Morphismus aus (41).

DEFINITION 2.4 (Triangulierte Kategorien). Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie mit einem Translations-Funktor T . Wir gehen davon aus, daß als Teil der Struktur folgende Daten festgelegt sind:

Kegel-Funktor: Sei $\text{Hom}[\underline{1} \rightarrow \mathcal{A}]$ die Kategorie der Funktoren aus der Kategorie $\underline{1}$ zur geordneten Menge $\{0 < 1\}$ nach \mathcal{A} mit natürlichen Transformationen als Morphismen. Alternativ sind die Objekte der Form $(A, B; u)$ und die Morphismen der Form $(f, g) : (A, B; u) \rightarrow (A', B'; u')$, wobei diese Notationen folgende kommutative Diagramme in \mathcal{A} bezeichnen:

$$(A, B; u) := \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & A \xrightarrow{u} B & \\ & & \end{array} \right], \quad (f, g) := \left[\begin{array}{ccc} & A \xrightarrow{u} B & \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ & A' \xrightarrow{u'} B' & \end{array} \right].$$

Insbesondere existiert ein Vergiß-Funktor $! : \text{TR}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Hom}[\underline{1} \rightarrow \mathcal{A}]$, welcher auf Objekten durch $!(A, B, C; u, v, w) = (A, B; u)$ und auf Morphismen durch $!(f, g, h) := (f, g)$ gegeben ist. Ein **Kegel-Funktor** ist ein Funktor

$$\text{Hom}[\underline{1} \rightarrow \mathcal{A}] \xrightarrow{\mathfrak{C}} \text{TR}$$

mit der Eigenschaft, daß die Verknüpfung $! \circ \mathfrak{C}$ der Identität-Funktor ist. Für einen Kegel-Funktor \mathfrak{C} bezeichnen wir durch $C(u)$, $p(u)$, $i(u)$, $C(f, g)$ Objekte und Morphismen, welche durch die Gleichheiten erklärt sind:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(A, B; u) &:= (A, B, C(u); u, p(u), i(u)) &= \left[\begin{array}{ccccc} & A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{p(u)} & C(u) & \xrightarrow{i(u)} & A[1] \\ & & & & & & & \end{array} \right], \\ \mathfrak{C}(f, g) &:= (f, g, \gamma(f, g)) &= \left[\begin{array}{ccccccc} & A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{p(u)} & C(u) & \xrightarrow{i(u)} & A[1] \\ f \downarrow & & & g \downarrow & & \gamma(f, g) \downarrow & & \downarrow f[1] \\ & A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{p(u')} & C(u') & \xrightarrow{i(u')} & A'[1] \end{array} \right], \end{aligned}$$

für einen Morphismus $(f, g) : (A, B; u) \rightarrow (A', B'; u')$ in $\text{Hom}[\underline{1} \rightarrow \mathcal{A}]$.

Distinguirierte Triangel: Sei \mathfrak{Dist} die volle Unterkategorie von $\text{TR}(\mathcal{A})$, welche erfüllt:

- \mathfrak{Dist} beinhaltet alle Objekte der Form $\mathfrak{C}(A, B; u)$ für $(A, B; u) \in \text{ObHom}(\underline{1} \rightarrow \mathcal{A})$, und
 - \mathfrak{Dist} beinhaltet mit einem Objekt alle in $\text{TR}(\mathcal{A})$ zu ihm isomorphismen Objekte.
- Objekte von \mathfrak{Dist} nennen wir **distinguirierte Triangel**.

Die obige Struktur ist die Struktur einer **triangulierten Kategorie**, falls die unterliegenden Daten folgende Axiome erfüllen:

TR 1 : $\mathfrak{C}(A, A; id_A)$ ist isomorph zu $[A = A \rightarrow 0 \rightarrow A[1]]$, für alle $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$.

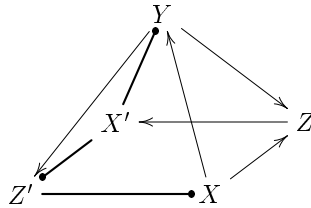
TR 2 : Folgende Isomorphismen in der Kategorie $\text{TR}(\mathcal{A})$ implizieren sich einander:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(A, B; u) &\cong \left[\begin{array}{ccccccc} & A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & A[1] \\ & & & & & & & \end{array} \right] \\ \mathfrak{C}(B, C; v) &\cong \left[\begin{array}{ccccccc} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & A[1] & \xrightarrow{-u[1]} & B[1] \\ & & & & & & & \end{array} \right] \end{aligned}$$

(Man bemerke den Vorzeichen-Wechsel im Morphismus $A[1] \xrightarrow{-u[1]} B[1]$.)

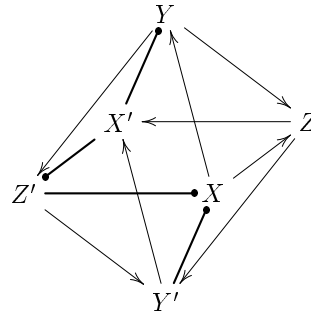
TR 3 : Das Oktogon-Axiom : Jedes "kommutativ-exakte" Diagramm der Form (42)

(42)

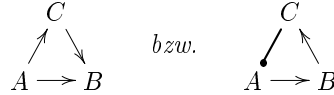


läßt sich zu einem vollen “kommutativ-exakten” Oktogon-Diagramm (43) vervollständigen:

(43)



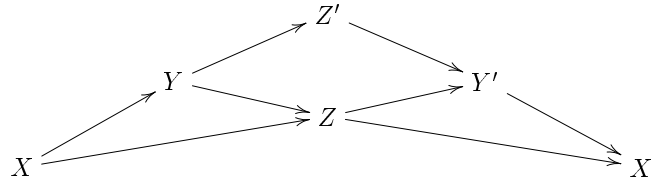
Unter einem “kommutativ-exakten” Diagramm verstehen wir ein Diagramm, in welchem alle Dreieck-Diagramme der Form



kommutativ bzw. distinguert sind.

Eine alternative partielle Darstellung des Oktogon-Diagramms (43) ist das Diagramm:

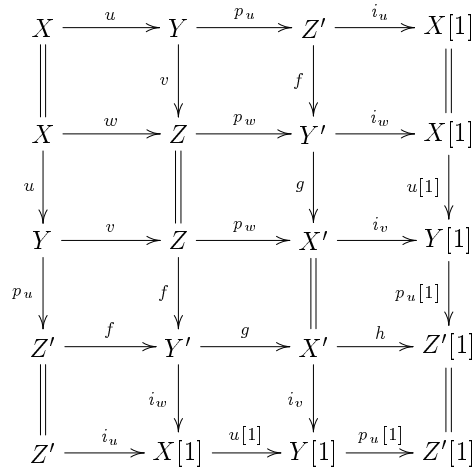
(44)



Dieses Diagramm betont die Morphismen von Triangeln: $(X, Y, Z') \rightarrow (X, Z, Y') \rightarrow (Y, Z, X') \rightarrow (Z', Y', X')$. Wir können nun alternativ das Oktogon-Axiom formulieren:

Seien $u : X \rightarrow Y$, $v : Y \rightarrow Z$ und $w := vu : X \rightarrow Z$ Morphismen in \mathcal{A} . Dann existiert ein kommutatives Diagramm mit distinguerten Zeilen:

(45)



Diskussion: Ausgehend vom linken obigen Quadrat, dessen Kommutativität $w = vu$ ist, können wir zuerst sukzessive (eindeutig bis auf Isomorphie) wählen:

- p_u, Z', i_u aus $\mathfrak{C}(X, Y; u) = (X, Y, Z'; u, p_u, i_u)$,
- p_w, Y', i_w aus $\mathfrak{C}(X, Z; w) = (X, Z, Y'; w, p_w, i_w)$,
- p_v, X', i_v aus $\mathfrak{C}(Y, Z; v) = (X, Z, Y'; v, p_v, i_v)$,
- und des weiteren $f := \gamma(\text{id}_X, v)$, $g := \gamma(u, \text{id}_Z)$.

Wir setzen $h := p_u[1] i_v$, und das Oktogon-Axiom sichert $(Z', Y', X'; f, g, h) \in \mathfrak{D}\text{ist}$. Das Diagramm der ersten vier Zeilen kann weiter mit der fünften tautologisch erweitert werden, und wir können die Triangel-Morphismen

schreiben:

$$(46) \quad \begin{array}{ccccccc} & \cdots & & & & & \\ & \curvearrowright & & & & & \\ & (X, Y, Z') \longrightarrow (X, Z, Y') \longrightarrow (Y, Z, X') \longrightarrow (Z', Y', X') & & & & & \\ & \curvearrowright & & & & & \\ & (Z', X[1], Y[1]) \longrightarrow (Y', X[1], Z[1]) \longrightarrow (X', Y[1], Z[1]) \longrightarrow (X', Z'[1], Y'[1]) & & & & & \\ & & & & & & \cdots \curvearrowleft \end{array}$$

Das kubische Analogon der 3×3 -Lemma für triangulierte Kategorien ist:

LEMMA 2.5 (Das 4×4 -Lemma). ([BBD], Prop. 1.1.11, S. 24; [Iv], Prop. 5.6, S.456) Jedes kommutative Quadrat-Diagramm mit Ecken A_1, A_2, B_1, B_2 läßt sich zu einem \mathbb{S} -kommutativen 4×4 -Diagramm mit distinguierten Zeilen und Spalten erweitern:

$$(47) \quad \begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & \bullet A_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & \bullet A_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_3 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & C_3 & \longrightarrow & \bullet A_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bullet A_1 & \longrightarrow & \bullet B_1 & \longrightarrow & \bullet C_1 & \longrightarrow & \bullet A_1 \end{array} \quad (*)$$

Die \mathbb{S} -Kommutativität bedeutet für das Quadrat $(*)$ die Anti-Kommutativität, und für die übrigen Quadrate die übliche Kommutativität.

BEWEIS: Der Beweis ist von den zitierten Quellen übernommen. Ausgehend vom kommutativen Diagramm

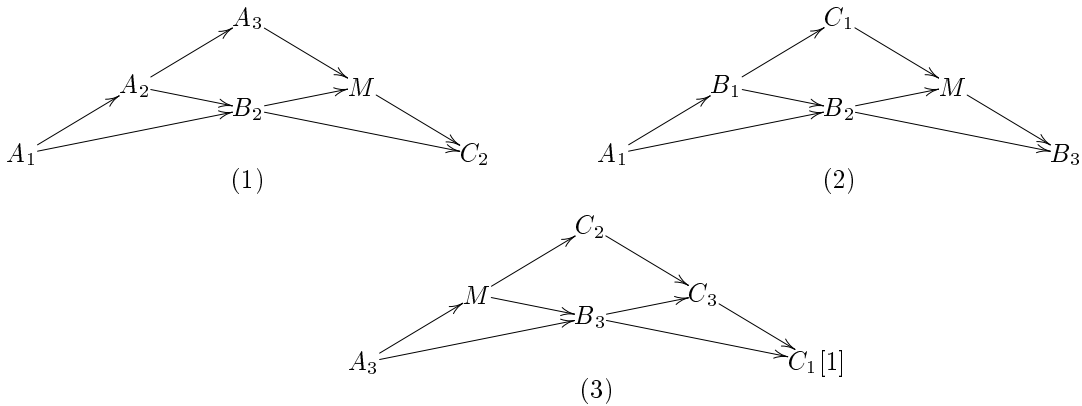
$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{x} & B_1 \\ a \downarrow & \searrow w & \downarrow b \\ A_2 & \xrightarrow{y} & B_2 \end{array} \quad , \quad w = bx = ya \quad ,$$

konstruieren wir zuerst die distinguierten Triangel und die Triangel-Morphismen:

$$\begin{aligned} \Delta[A_1 B_1 C_1] &:= \mathfrak{C}(A_1, B_1; x) & \Delta[A_1 A_2 A_3] &:= \mathfrak{C}(A_1, A_2; a) \\ \Delta[A_2 B_2 C_2] &:= \mathfrak{C}(A_2, B_2; y) & \Delta[B_1 B_2 B_3] &:= \mathfrak{C}(B_1, B_2; b) \\ \Delta[A_1 B_1 C_1] \rightarrow \Delta[A_2 B_2 C_2] &:= \mathfrak{C}(a, b) & \Delta[A_1 A_2 A_3] \rightarrow \Delta[B_1 B_2 B_3] &:= \mathfrak{C}(x, y) \end{aligned}$$

$$\Delta[A_1 B_2 M] := \mathfrak{C}(A_1, B_2, w) \quad .$$

Aus dem Oktogon-Axiom für die Diagramme:



erhalten wir folgende Triangel-Morphismen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \Delta[A_1 B_2 M] & & \Delta[C_1 M B_3] & & \Delta[M C_2 A_3[1]] & \\
 & \nearrow (1) & \searrow (2) & \nearrow (2) & \searrow (3) & \nearrow (3) & \searrow (1) \\
 \Delta[A_1 A_2 A_3] & \longrightarrow & \Delta[B_1 B_2 B_3] & \longrightarrow & \Delta[C_1 C_2 C_3] & \longrightarrow & \Delta[A_1[1] A_2[1] A_3[1]] \\
 & \nearrow (1) & \searrow (1) & \nearrow (2) & \searrow (3) & \nearrow (3) & \searrow (2) \\
 \Delta[A_1 B_1 C_1] & \longrightarrow & \Delta[A_2 B_2 C_2] & \longrightarrow & \Delta[A_3 B_3 C_3] & \longrightarrow & \Delta[A_1[1] B_1[1] C_1[1]]
 \end{array}$$

Diese erklären die \S -Kommutativität im 4×4 -Diagramm (47). \square

2.3. Die Waldhausen-Konstruktion für triangulierte Kategorien. Wir benutzen die Begriffe dieses Unterabschnitts im weiteren Verlauf der Arbeit **nicht**.

DEFINITION 2.6. Sei \mathcal{A} eine triangulierte Kategorie. Wir definieren die WALDHAUSEN-Konstruktion für die triangulierte Kategorie \mathcal{A}

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}\mathcal{A} &\subseteq \text{Hom} [\text{Wald}(\underline{\cdot}) \rightarrow \mathcal{A}] , \\
 \mathbf{S}_n \mathcal{A} &\subseteq \text{Hom} [\text{Wald}(\underline{n}) \rightarrow \mathcal{A}] \text{ für } n \geq 0 ,
 \end{aligned}$$

als eine Untermenge der Funktoren ξ von der Diagramm-Kategorie $\text{Wald}(\underline{n})$ nach \mathcal{A} , welche folgende Eigenschaften erfüllen:

- $\xi(*) = \xi(i, i) = 0$,
- Für $0 \leq i < j < k \leq n$ ist zusätzlich zu den Morphismen

$$\begin{aligned}
 \xi((i, j) < (i, k)) &: \xi(i, j) \rightarrow \xi(i, k) \text{ und} \\
 \xi((i, k) < (j, k)) &: \xi(i, k) \rightarrow \xi(j, k) \text{ ein Morphismus} \\
 \xi(j, k) &\rightarrow \xi(i, j)[1] \text{ als **Teil der Struktur** gegeben,}
 \end{aligned}$$

so daß ein distinguiertes Triangel entsteht:

$$\xi(i, j) \rightarrow \xi(i, k) \rightarrow \xi(j, k) \rightarrow \xi(i, j)[1] , \text{ welches als } \xi(i < j < k) \text{ bezeichnet wird.}$$

- Für $0 \leq i < j < k < l \leq n$ gilt das Oktogon-Axiom für das (unvollständige) Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xi(j, k) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \xi(i, k) & & & & \xi(j, l) \\
 \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \\
 \xi(i, j) & & \xi(i, l) & & \xi(k, l)
 \end{array}$$

Die kubische WALDHAUSEN-Konstruktion für die triangulierte Kategorie \mathcal{A} kann analog eingeführt werden.

3. Die Homotopie-Kategorie als triangulierte Kategorie

Wir haben die Darstellung in diesem Abschnitt aus [GM] (§4.2, §5.1), [lv] (I.4) und [Bou] (S. 36–40) mit dem Zweck übernommen, um die Notation für weitere Anreicherungen der Struktur festzulegen. Die Definitionen des Kegels und Zylinders eines Morphismus sind standard. Da wir **Super**-Tensorprodukte dieser Objekte betrachten, ist es notwendig, die "Verschiebungen" innerhalb ihrer Differentiale zu kontrollieren.

Dies ist technisch leicht: Wir führen in der Definition 3.2 einen bürokratischen Morphismus t ein, mit welchem wir später die Standard-Differentiale des Kegels und Zylinders und alle des weiteren betrachteten Morphismen konsequent versehen. Dadurch sind wir auch befreit, Gleichheiten in der \S -Algebra auf Elementen zu testen und Berechnungen in der Homotopie-Kategorie erst nach einer Wahl der Repräsentanten zu führen.

3.1. Die Kategorien $\text{Kom}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Sei \mathcal{A} eine **additive** Kategorie. Wir bezeichnen durch

$$\text{Kom}(\mathcal{A}) \quad \text{respektive} \quad \mathcal{K}(\mathcal{A})$$

die Kategorie der Komplexe in \mathcal{A} (mit dem Differential vom Grad 1) und respektive die Homotopie-Kategorie, welche als Objekte Komplexe und als Morphismen Komplex-Morphismen modulo der homotopischen Äquivalenzrelation hat.

DEFINITION 3.1. Sei $A = (A, d)$ ein Komplex in \mathcal{A} . Der Komplex $A[1] = (A[1], d[1])$ ist gegeben durch:

$$(48) \quad (A[1])^n := A^{n+1} \quad \text{und hat das Differential:} \quad \left(A[1]^{n-1} \xrightarrow{d[1]} A[1]^n \right) := - \left(A^n \xrightarrow{d} A[1]^{n+1} \right)$$

DEFINITION 3.2 (Der Morphismus t). Sei A ein Komplex in \mathcal{A} . Der Morphismus t (oder t_A , wenn wir auch die Abhängigkeit von A betonen wollen,) ist der Morphismus vom Grad -1 :

$$(49) \quad t : A \rightarrow A[1] \quad \text{gegeben im Grad } n \text{ durch die Identität } t^n : A^n = A^{(n-1)+1} =: (A[1])^{n-1}.$$

Die letzten Definitionen machen das folgende Diagramm $\$$ -kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & A[1] \\ d \downarrow & & \downarrow d[1] \\ A & \xrightarrow{t} & A[1] \end{array}$$

in dem Sinne, daß gilt: $d[1]t = -td$, oder $d[1]t + td = 0$.

NOTATION 3.3. Für einen Morphismus $f : A \rightarrow B$ vom Grad n notieren wir formal den gemischeten Super-Kommutator

$$d_B f - (-1)^n f d_A \quad \text{durch} \quad [d, f].$$

Mit dieser Terminologie $\$$ -kommutieren t und " d ", und eine Homotopie zwischen zwei Morphismen vom Grad Null $f, g : A \rightarrow B$ ist eine Abbildung H vom Grad -1 mit der Eigenschaft $f - g = [d, H]$.

3.2. Der Zylinder und der Kegel eines Morphismus.

DEFINITION 3.4 (Der Kegel). Sei $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus in $\text{Kom}(\mathcal{A})$. Der **Kegel** von f ist der Komplex $C(f)$ gegeben durch:

$$C(f) := \begin{bmatrix} A[1] \\ \oplus \\ B \end{bmatrix} \quad \text{mit dem Differential} \quad \begin{bmatrix} d[1] & \cdot \\ ft^{-1} & d \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} A[1] \\ \oplus \\ B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A[1] \\ \oplus \\ B \end{bmatrix}.$$

Wir benutzen auch weiter die Konvention, daß fehlende oder mit einem Punkt markierten Matrixeinträge Null sind. Wir bemerken, daß das Differential auf dem einfachen Komplex von f , welcher als $C(f)[-1]$ definiert ist, mit den obigen Vereinbarungen folgende Matrixgestalt einnimmt:

$$\begin{aligned} - \left[\begin{array}{c} A \\ \oplus \\ B[-1] \end{array} \xleftarrow{\begin{bmatrix} t^{-1} & \cdot \\ \cdot & t^{-1} \end{bmatrix}} \begin{array}{c} A[1] \\ \oplus \\ B \end{array} \xleftarrow{\begin{bmatrix} d[1] & \cdot \\ ft^{-1} & d \end{bmatrix}} \begin{array}{c} A[1] \\ \oplus \\ B \end{array} \xleftarrow{\begin{bmatrix} t & \cdot \\ \cdot & t \end{bmatrix}} \begin{array}{c} A \\ \oplus \\ B[-1] \end{array} \right] &= - \begin{bmatrix} t^{-1} & \cdot \\ \cdot & t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d[1] & \cdot \\ ft^{-1} & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & \cdot \\ \cdot & t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d & \cdot \\ -tf & d[-1] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

In der Literatur wird die Vorzeichen-Konvention oft so getroffen, daß der Kegel von f dann $C(-f)$ in unserer Notation ist. Der unterdiagonale Eintrag ft^{-1} (resp. $-tf$) ändert sich bei der neuen Konvention das Vorzeichen in der Matrix-Darstellung des Differential.

Die Festlegung dieser Vorzeichen-Konvention hängt davon ab, ob der Kegel-Komplex oder der einfache Komplex von f vom Autor als Haupt-Objekt betrachtet wird. In dieser Arbeit werden beide Konventionen für disjunkte Richtungen benutzt: Wir arbeiten in diesem Abschnitt mit der obigen Definition/Konvention. Im nächsten Teil der Arbeit, Regulatoren, steht der einfache Komplex im Mittelpunkt der Diskussion, und wir werden mit der anderen Konvention arbeiten.

DEFINITION 3.5 (Der Zylinder). Sei $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus in $\text{Kom}(\mathcal{A})$. Der **Zylinder** von f ist der Komplex $\text{Cyl}(f)$ gegeben durch:

$$\text{Cyl}(f) := C \left(A \xrightarrow{(-1, f)} A \oplus B \right) = \begin{bmatrix} A[1] \\ \oplus \\ A \\ \oplus \\ B \end{bmatrix} \text{ mit Differential } \begin{bmatrix} d[1] & \cdot & \cdot \\ -t^{-1} & d & \cdot \\ ft^{-1} & \cdot & d \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} A[1] \\ \oplus \\ A \\ \oplus \\ B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A[1] \\ \oplus \\ A \\ \oplus \\ B \end{bmatrix}.$$

LEMMA 3.6 ([Bou] A X.38, [Iv] I.4, [GM] Lemma 2.2.1). Folgendes Diagramm ist ein in f funktorielles kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen in der Kategorie $\text{Kom}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\pi} & C(f) & \xrightarrow{\delta} & A[1] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Cyl}(f) & \xrightarrow{\bar{\pi}} & C(f) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \beta & & \\ & & A & \xrightarrow{f} & B & & \end{array}$$

Die Morphismen $\pi = \pi(f)$, $\delta = \delta(f)$, $\bar{\pi} = \bar{\pi}(f)$, $\alpha = \alpha(f)$, $\beta = \beta(f)$ in diesem Diagramm sind:

$$\pi := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \delta := \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\pi} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \beta := \begin{bmatrix} 0 & f & 1 \end{bmatrix},$$

Wir haben für jeweilige Identitäten 1 geschrieben. Die Morphismen α und β erklären einen Isomorphismus in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ zwischen den Objekten B und $\text{Cyl}(f)$: Die Verknüpfung $\beta\alpha$ ist die Identität auf B und die Verknüpfung $\alpha\beta$ ist homotop zur Identität von $\text{Cyl}(f)$ durch die Homotopie $H : \text{Cyl}(f) \rightarrow \text{Cyl}(f)[-1]$,

$$H := \begin{bmatrix} \cdot & t & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & f & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & t & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d[1] & \cdot & \cdot \\ -t^{-1} & d & \cdot \\ ft^{-1} & \cdot & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d[1] & \cdot & \cdot \\ -t^{-1} & d & \cdot \\ ft^{-1} & \cdot & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & t & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

3.3. Der Kegel-Funktor.

DEFINITION 3.7. Wir definieren den Funktor $\mathfrak{C} : \text{Hom}[\underline{1} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})] \rightarrow \text{TR}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$ unter den Notationen aus dem Lemma 3.6

auf Objekten: $\mathfrak{C}(A, B; u) := (A, B, C(u); u, \bar{\pi}(u)\alpha(u), \delta(u))$ und wir setzen $p(u) := \bar{\pi}(u)\alpha(u)$.

auf Morphismen: Sei $(f, g) : (A, B; u) \rightarrow (A', B'; u')$ ein Vertreter eines Morphismus aus $\text{Hom}[\underline{1} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})]$. Wir definieren $\mathfrak{C}(f, g) : \mathfrak{C}(A, B; u) \rightarrow \mathfrak{C}(A', B'; u')$ durch das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{p(u)=\bar{\pi}(u)\alpha(u)} & C(u) & \xrightarrow{\delta(u)} & A[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow \gamma(f, g) & & \downarrow f[1] \\ A' & \xrightarrow{u} & B' & \xrightarrow{p(u')=\bar{\pi}(u')\alpha(u')} & C(u') & \xrightarrow{\delta(u')} & A'[1] \end{array}$$

Dabei ist $\gamma(f, g) : C(u) \rightarrow C(u')$ die diagonale Matrix mit den diagonalen Einträgen $f[1] = tft^{-1}$ und g .

- Das Axiom **TR 1** folgt, da $C(\text{id}_A)$ zu 0 isomorph ist: Identifizieren wir $C(\text{id}_A) = [A[1] \oplus A] \cong [A[1] \oplus A \oplus 0] = \text{Cyl}(A \rightarrow 0)$ (als graduierte \mathcal{A} -Objekte), so liefert die diagonale Matrix mit Diagonal-Einträgen $(-\text{id}_{A[1]}, -\text{id}_A, 0)$ einen Isomorphismus $C(\text{id}_A) \cong \text{Cyl}(A \rightarrow 0)$. Das letzte Objekt ist isomorph zu 0.
- Zum Axiom **TR 2**: Wir starten mit einem Morphismus $f : A \rightarrow B$ und arbeiten im Rahmen der Notationen aus dem Lemma 3.6. Dann ist

$$C(\pi : B \rightarrow C(f)) = \begin{bmatrix} B[1] \\ \oplus \\ C(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B[1] \\ \oplus \\ A[1] \\ \oplus \\ B \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} A[1] \\ \oplus \\ B[1] \\ \oplus \\ B \end{bmatrix} \text{ mit Differential } \begin{bmatrix} d_{A[1]} & \cdot & \cdot \\ \cdot & d_{B[1]} & \cdot \\ ft^{-1} & t^{-1} & d_B \end{bmatrix},$$

und wir bemerken dadurch den Isomorphismus $C(\pi) \cong C(A \rightarrow C(B = B)) \cong C(A \rightarrow 0) = A[1]$. Schreiben wir explizit diesen Isomorphismus, so erhalten wir das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\pi} & C(f) & \xrightarrow{\delta} & A[1] \xrightarrow{-u[1]} B[1] \\
 & & \parallel & & \parallel & & \updownarrow [\cdot \ 1 \cdot] \left[\begin{smallmatrix} -u[1] \\ 1 \\ \cdot \end{smallmatrix} \right] \\
 & & B & \xrightarrow{\pi} & \left[\begin{smallmatrix} A[1] \\ \oplus \\ B \end{smallmatrix} \right] & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{smallmatrix} \right]} & \left[\begin{smallmatrix} B[1] \\ \oplus \\ A[1] \\ \oplus \\ B \end{smallmatrix} \right] \xrightarrow{[1 \ \cdot \cdot]} B[1] \\
 & & & & & & \parallel
 \end{array}$$

in welchem die senkrechten, nicht identischen Pfeile homotop invers zueinander sind, und der Pfeil nach oben in kommutativen quadratischen Diagrammen steht. Es folgt die Kommutativität eines Diagramms:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\pi(f)} & C(f) & \xrightarrow{\delta(f)} & A[1] \xrightarrow{-u[1]} B[1] \\
 & & \parallel & & \parallel & & \updownarrow \cong \\
 & & B & \xrightarrow{\pi(f)} & C(f) & \xrightarrow{\pi(\pi(f))} & C(\pi(f)) \xrightarrow{\delta(\pi(f))} B[1]
 \end{array}$$

Das Axiom folgt.

- Das Oktogon-Axiom **TR 3**: Seien $u : X \rightarrow Y$, $v : Y \rightarrow Z$ und $w := vu : X \rightarrow Z$ Morphismen in \mathcal{A} . Wir bilden analog zu (45) das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{[i]} & \left[\begin{smallmatrix} X[1] \\ \oplus \\ Y \end{smallmatrix} \right] & \xrightarrow{[1 \ \cdot]} & X[1] \\
 \parallel & & \downarrow v & & \downarrow \left[\begin{smallmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & v \end{smallmatrix} \right] & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{w} & Z & \xrightarrow{[i]} & \left[\begin{smallmatrix} X[1] \\ \oplus \\ Z \end{smallmatrix} \right] & \xrightarrow{[1 \ \cdot]} & X[1] \\
 \downarrow u & & \parallel & & \downarrow \left[\begin{smallmatrix} u[1] & \cdot \\ \cdot & 1 \end{smallmatrix} \right] & & \downarrow u[1] \\
 Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{[i]} & \left[\begin{smallmatrix} Y[1] \\ \oplus \\ Z \end{smallmatrix} \right] & \xrightarrow{[1 \ \cdot]} & Y[1] \\
 \downarrow [i] & & \downarrow [i] & & \parallel & & \downarrow [i] \\
 \left[\begin{smallmatrix} X[1] \\ \oplus \\ Y \end{smallmatrix} \right] & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & v \end{smallmatrix} \right]} & \left[\begin{smallmatrix} X[1] \\ \oplus \\ Z \end{smallmatrix} \right] & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} u[1] & \cdot \\ \cdot & 1 \end{smallmatrix} \right]} & \left[\begin{smallmatrix} Y[1] \\ \oplus \\ Z \end{smallmatrix} \right] & \xrightarrow{[i \ \cdot]} & \left[\begin{smallmatrix} X[2] \\ \oplus \\ Y[1] \end{smallmatrix} \right]
 \end{array}$$

Die ersten drei Zeilen sind $\mathfrak{C}(X, Y; u)$, $\mathfrak{C}(X, Z, w)$ und $\mathfrak{C}(Y, Z; v)$, also distinguiert. Zu zeigen ist, daß die vierte Zeile auch distinguiert ist. Seien

$$\begin{aligned}
 V &:= \left(C(u) \xrightarrow{\gamma(1, v)} C(w) \right) = \left(\left[\begin{smallmatrix} X[1] \\ \oplus \\ Y \end{smallmatrix} \right] \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & v \end{smallmatrix} \right]} \left[\begin{smallmatrix} X[1] \\ \oplus \\ Z \end{smallmatrix} \right] \right) \text{ und} \\
 V' &:= \left(C(\text{id}_X) \xrightarrow{\gamma(u, -w)} C(-v) \right) = \left(\left[\begin{smallmatrix} X[1] \\ \oplus \\ X \end{smallmatrix} \right] \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} u[1] & \cdot \\ \cdot & -w \end{smallmatrix} \right]} \left[\begin{smallmatrix} Y[1] \\ \oplus \\ Z \end{smallmatrix} \right] \right).
 \end{aligned}$$

Dann ist $C(V) \cong C(V') = C(C(\text{id}_X) \rightarrow C(-v)) \cong C(0 \rightarrow C(-v)) = C(-v) \cong C(v)$. Wir machen diese Isomorphismen in der homotopischen Kategorie explizit:

$$C(V) = \begin{bmatrix} X[2] \\ \oplus \\ Y[1] \\ \oplus \\ X[1] \\ \oplus \\ Z \end{bmatrix} \xrightleftharpoons{\begin{bmatrix} 1 & \cdot & -1 \\ & -1 & \cdot \\ & & 1 \end{bmatrix}} C(V') = \begin{bmatrix} X[2] \\ \oplus \\ X[1] \\ \oplus \\ Y[1] \\ \oplus \\ Z \end{bmatrix} \xrightleftharpoons{\begin{bmatrix} \cdot & u[1] & 1 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} Y[1] \\ \oplus \\ Z \end{bmatrix} \xrightleftharpoons{\begin{bmatrix} -1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} Y[1] \\ \oplus \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_X[2] \\ -u[1]t^{-1} & d_Y[1] \\ t^{-1} & & d_X[1] \\ & vt^{-1} & wt^{-1} & d_Z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d_X[2] \\ -t^{-1} & d_X[1] \\ u[1]t^{-1} & & d_Y[1] \\ & -wt^{-1} & -vt^{-1} & d_Z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d_Y[1] \\ -vt^{-1} & d_Z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d_Y[1] \\ vt^{-1} & d_Z \end{bmatrix}$$

Unter jedem Komplex steht sein Differential. Die Verknüpfungen $C(V) \xrightleftharpoons{\quad} C(v)$ erläutern einen Triangel-Isomorphismus

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{bmatrix} X[1] \\ \oplus \\ Y \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & v \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} X[1] \\ \oplus \\ Z \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} X[2] \\ \oplus \\ Y[1] \\ \oplus \\ X[1] \\ \oplus \\ Z \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} X[2] \\ \oplus \\ Y[1] \end{bmatrix} \\ \parallel & & \parallel & & \updownarrow \begin{bmatrix} \cdot & 1 & u[1] & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} & & \parallel \\ \begin{bmatrix} X[1] \\ \oplus \\ Y \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & v \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} X[1] \\ \oplus \\ Z \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} u[1] & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} Y[1] \\ \oplus \\ Z \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} X[2] \\ \oplus \\ Y[1] \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Hopf-Algebra-Objekte

4.1. Tensor-Kategorien. Seien \mathcal{A} , \mathcal{B} und \mathcal{C} Kategorien.

Wir bezeichnen durch $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ die Kategorie mit

Objekten: (A, B) , für A, B beliebige Objekte aus \mathcal{A} resp. \mathcal{B} ,

Morphismen: (f, g) , für f, g beliebige Morphismen aus \mathcal{A} resp. \mathcal{B} .

Die Verknüpfung der Morphismen $(f, g) : (A, B) \rightarrow (A', B')$ und $(f', g') : (A', B') \rightarrow (A'', B'')$ in $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist

$$(f', g') \circ (f, g) := (f' \circ f, g' \circ g) .$$

Wir werden formal identifizieren:

$$(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C} = \mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) .$$

Ist \mathcal{A} eine additive Kategorie, so ist $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ es auch. Wir arbeiten ab sofort nur mit additiven Kategorien. Funktoren zwischen solchen Kategorien werden immer additiv sein.

DEFINITION 4.1. Eine additive Kategorie \mathcal{A} mit einem additiven Funktor $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ist eine **ACU-Tensorkategorie**, falls sie als Teil der Struktur mit folgenden Daten versehen ist:

(A): eine natürliche Äquivalenz $a : \otimes(\otimes \times id) \xrightarrow{\sim} \otimes(id \times \otimes)$ zwischen Funktoren $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Auf Objekten A, B, C aus \mathcal{A} ist der Isomorphismus induziert:

$$a_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C) .$$

a heißt **Assoziativitäts-Konstante**.

(C): eine natürliche Äquivalenz $c : \otimes \xrightarrow{\sim} \otimes \tau$ zwischen Funktoren $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Dabei ist $\tau = \tau_{12}$ der Funktor, induziert von der kanonischen Aktion der symmetrischen Gruppe mit zwei Elementen vermöge der Transposition (12). Auf Objekten: $\tau(A, B) := (B, A)$, auf Morphismen: $\tau(f, g) := (g, f)$.

Für zwei Objekte A, B aus \mathcal{A} entsteht ein Isomorphismus:

$$c_{A,B} : A \otimes B \rightarrow B \otimes A .$$

c heißt **Kommutativitäts-Konstante**.

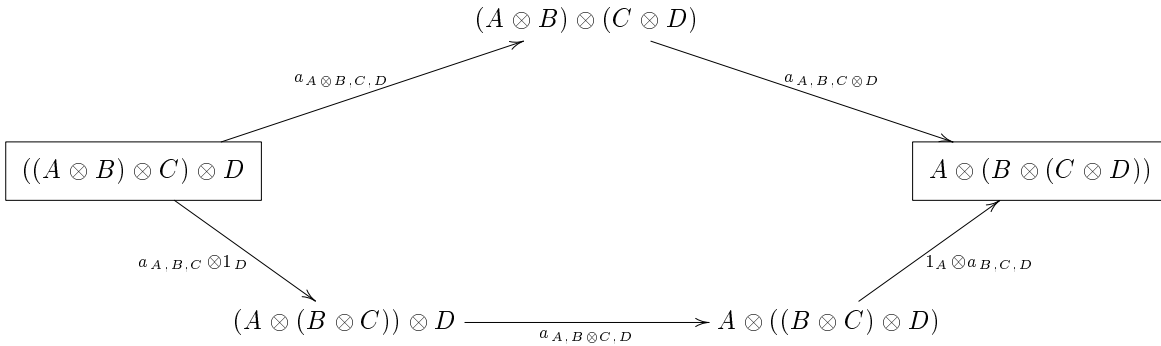
(U): ein Objekt I in \mathcal{A} und natürliche Äquivalenzen $u = u_{links} : \otimes(I \times id) \xrightarrow{\sim} id$ und $u = u_{rechts} : \otimes(id \times I) \xrightarrow{\sim} id$ zwischen Funktoren $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Für ein Objekt $A \in \mathcal{A}$ entstehen Isomorphismen:

$$u_A : I \otimes A \rightarrow A \quad \text{und} \quad u_A : A \otimes I \rightarrow A .$$

u_{links} und u_{rechts} heißen **Unitäts-Konstanten**. Wir werden oft nur u für beide schreiben.

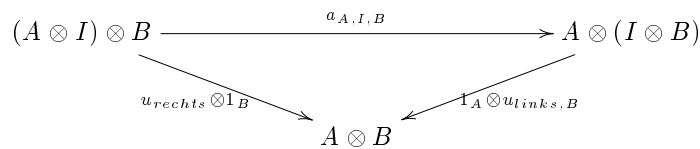
Diese Daten müssen des weiteren folgenden Bedingungen unterliegen:

Das Pentagon-Axiom für a : Für beliebige vier Objekte A, B, C, D in \mathcal{A} ist das folgende Diagramm funktoriell kommutativ:

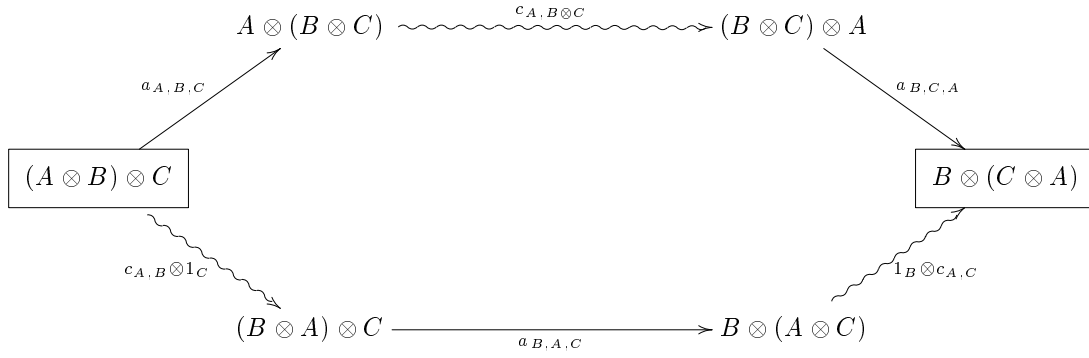


Die einzigen zwei möglichen Wege für die Umgruppierung der Klammer zwischen den zwei eingerahmten Termen sind gleich.

Verträglichkeit zwischen a und u : Für beliebige Objekte A, B in \mathcal{A} kommutiert funktoriell:

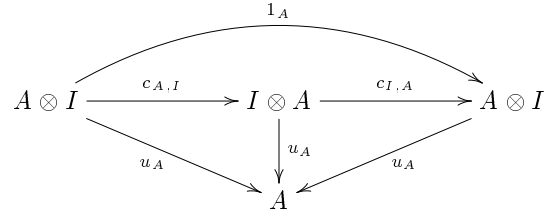


Verträglichkeit zwischen a und c : Das Hexagon-Axiom: Für beliebige Objekte A, B, C in \mathcal{A} kommutiert funktoriell:



Wir werden des weiteren auch die Abkürzung **Tensorkategorie** für eine ACU-Tensorkategorie verwenden.

Als Korollar folgt die Verträglichkeit zwischen u und c : Für ein beliebiges Objekt A in \mathcal{A} kommutiert funktoriell:



4.2. Hopf-Objekte in einer Tensor-Kategorie.

DEFINITION 4.2. Sei \mathcal{A} eine Tensor-Kategorie. Wir beschreiben Bedingungen an einem 5-Tupel $(A; \epsilon, \eta, m, \Delta; S)$ von Objekten und Morphismen in \mathcal{A} und legen simultan die Terminologie fest.

- A ist ein Objekt aus \mathcal{A} .
- m ist eine Multiplikation in \mathcal{A} . Damit ist die Assoziativität von m gemeint, welche durch die Kommutativität des Diagramms erklärt ist:

$$\begin{array}{ccccc} (A \otimes A) \otimes A & \xrightarrow{m \otimes 1_A} & A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ \downarrow a_{A,A,A} \cong & & & \nearrow m & \\ A \otimes (A \otimes A) & \xrightarrow{1_A \otimes m} & A \otimes A & & \end{array}$$

Wir werden oft die Assoziativitäts-Konstante a unterdrücken und diese Eigenschaft als $m(m \otimes 1) = m(1 \otimes m)$ ausdrücken.

- Δ ist eine Komultiplikation. Dies bedeutet die Kommutativität des Diagramms (Koassoziativität):

$$\begin{array}{ccccc} (A \otimes A) \otimes A & \xleftarrow{\Delta \otimes 1_A} & A \otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A \\ \downarrow a_{A,A,A} \cong & & & \nearrow \Delta & \\ A \otimes (A \otimes A) & \xleftarrow{1_A \otimes \Delta} & A \otimes A & & \end{array}$$

- ϵ und η sind Morphismen in \mathcal{A} :

$$\epsilon : A \rightarrow I \quad \text{und} \quad \eta : I \rightarrow A ,$$

so daß η eine Einheit bzgl. m ist, und ϵ eine Koeinheit bzgl. Δ : Dies bedeutet die Kommutativität der Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes I & \xrightarrow{1_A \otimes \eta} & A \otimes A \xleftarrow{\eta \otimes 1_A} I \otimes A \\ & \searrow u_A & \downarrow m \nearrow u_A \\ & & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A \otimes I & \xleftarrow{1_A \otimes \epsilon} & A \otimes A \xrightarrow{\epsilon \otimes 1_A} I \otimes A \\ & \nwarrow u_A^{-1} & \uparrow \Delta \nearrow u_A^{-1} \\ & & A \end{array}$$

Terminologie: Die Struktur (A, η, m) heißt ein **Algebra-Objekt** in \mathcal{A} , und (A, ϵ, Δ) ein **Koalgebra-Objekt**, falls alle obigen (A, η, m) respektive (A, ϵ, Δ) betreffenden Bedingungen erfüllt sind. Die (Ko)Algebra-Objekte bilden eine Kategorie mit Morphismen $f : (A_1, \eta_1, m_1) \rightarrow (A_2, \eta_2, m_2)$ resp. $f : (A_1, \epsilon_1, \Delta_1) \rightarrow (A_2, \epsilon_2, \Delta_2)$: Dabei ist f ein Morphismus $f : A_1 \rightarrow A_2$, so daß in \mathcal{A} kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} A_1 \otimes A_1 & \xrightarrow{m_1} & A_1 \xleftarrow{\eta_1} I \\ f \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\ A_2 \otimes A_2 & \xrightarrow{m_2} & A_2 \xleftarrow{\eta_2} I \end{array} \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} A_1 \otimes A_1 & \xleftarrow{\Delta_1} & A_1 \xrightarrow{\epsilon_1} I \\ f \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\ A_2 \otimes A_2 & \xleftarrow{\Delta_2} & A_2 \xrightarrow{\epsilon_2} I \end{array} .$$

Das Objekt I hat eine kanonische Struktur als (Ko)Algebra-Objekt: (I, id_I, u_I) . Weitere Einschränkungen:

- $\epsilon : A \rightarrow I$ ist verträglich mit der Algebra-Struktur (A, η, m) , i.e. induziert einen Algebra-Morphismus $\epsilon : (A, \eta, m) \rightarrow (I, id_I, u_I)$, und
 $\eta : I \rightarrow A$ ist verträglich mit der Koalgebra-Struktur (A, ϵ, Δ) , i.e. induziert einen Koalgebra-Morphismus $\epsilon : (A, \epsilon, \Delta) \rightarrow (I, id_I, u_I^{-1})$. Diese Verträglichkeiten bedeuten die Kommutativität der Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ \epsilon \otimes \epsilon \downarrow & & \downarrow \epsilon \\ I \otimes I & \xrightarrow{u_I} & I \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A \otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A \\ \eta \otimes \eta \uparrow & & \uparrow \eta \\ I \otimes I & \xrightarrow{u_I} & I \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{id_I} & I \\ \eta \searrow & & \nearrow \epsilon \\ & A & \end{array}$$

- Eine weitere Bedingung ist die Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{A \otimes A} & \xrightarrow{\Delta \otimes \Delta} & (A \otimes A) \otimes (A \otimes A) \\
 \downarrow m & & \searrow \tau_{23} := 1_A \otimes c_{A,A} \otimes 1_A \\
 & & (A \otimes A) \otimes (A \otimes A) \\
 & & \downarrow m \otimes m \\
 A & \xrightarrow{\Delta} & \boxed{A \otimes A}
 \end{array}$$

Der Isomorphismus $\tau_{23} := 1_A \otimes c_{A,A} \otimes 1_A$ der Vertauschung der 2. und 3. Tensorfaktoren steht genauer für die Verknüpfung von Morphismen:

$$\begin{array}{ccccc}
 (A \otimes A) \otimes (A \otimes A) & \xrightarrow[\cong]{a_{A,A,A} \otimes A} & A \otimes (A \otimes (A \otimes A)) & \xrightarrow[\cong]{1_A \otimes a_{A,A,A}^{-1}} & A \otimes ((A \otimes A) \otimes A) \\
 & & & & \downarrow \cong 1_A \otimes (c_{A,A} \otimes 1_A) \\
 (A \otimes A) \otimes (A \otimes A) & \xleftarrow[\cong]{a_{A,A,A}^{-1}} & A \otimes (A \otimes (A \otimes A)) & \xleftarrow[\cong]{1_A \otimes a_{A,A,A}} & A \otimes ((A \otimes A) \otimes A)
 \end{array}$$

Wir benutzen analog die Notation τ_σ für eine Vertauschung der Tensorfaktoren, entsprechend einer Permutation σ .

m, η und Δ, ϵ induzieren auf $A \otimes A$ kanonische Algebra- und Koalgebra-Strukturen $(A \otimes A, \eta_\otimes, m_\otimes)$ und $:(A \otimes A, \epsilon_\otimes, \Delta_\otimes)$ gegeben durch die Morphismen:

$$\begin{aligned}
 m_\otimes : (A \otimes A) \otimes (A \otimes A) &\xrightarrow{\tau_{23}} (A \otimes A) \otimes (A \otimes A) \xrightarrow{m \otimes m} A \otimes A \\
 \eta_\otimes : I &\xrightarrow{u_I} I \otimes I \xrightarrow{\eta \otimes \eta} A \otimes A \\
 \Delta_\otimes : A \otimes A &\xrightarrow{\Delta \otimes \Delta} (A \otimes A) \otimes (A \otimes A) \xrightarrow{\tau_{23}} (A \otimes A) \otimes (A \otimes A) \\
 \epsilon_\otimes : A \otimes A &\xrightarrow{\epsilon \otimes \epsilon} I \otimes I \xrightarrow{u_I} I
 \end{aligned}$$

Gelten alle obigen Bedingungen, so sind m, η resp. Δ, ϵ Morphismen von Ko- resp. Algebren.

Terminologie: Ein Objekt $(A; \epsilon, \eta; m, \Delta)$, beschrieben durch die obigen Daten und Bedingungen, heißt **Bialgebra**-Objekt in \mathcal{A} . Solche Objekte bilden eine Kategorie mit solchen Morphismen, welche Ko- und Algebra-Morphismen sind.

- Sei $(A; \epsilon, \eta; m, \Delta)$ eine Bialgebra in \mathcal{A} . Auf $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$ definieren wir die Faltung:

$$* : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$$

für zwei Morphismen $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$ durch $f * g := m(f \otimes g)\Delta \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$. Diese Operation ist assoziativ:

$$\begin{aligned}
 (f * g) * h &:= m[(m(f \otimes g)\Delta) \otimes h] \Delta \\
 &= m[(m \otimes 1_A)((f \otimes g) \otimes 1_A)(\Delta \otimes 1_A)(1_A \otimes h)] \Delta \\
 &= m(m \otimes 1_A)((f \otimes g) \otimes h)(\Delta \otimes 1_A)\Delta \\
 &\stackrel{\boxed{=}}{=} m(1_A \otimes m)(f \otimes (g \otimes h))(1_A \otimes \Delta)\Delta \\
 &= f * (g * h) .
 \end{aligned}$$

Die durch $\boxed{=}$ betonte Stelle folgt von der Naturalität von a aus dem Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & A \otimes A & \xleftarrow{m \otimes 1_A} & (A \otimes A) \otimes A & \xleftarrow{(f \otimes g) \otimes h} & (A \otimes A) \otimes A & \xleftarrow{\Delta \otimes 1_A} & A \otimes A \\
 & \swarrow m & & \downarrow a_{A,A,A} & & \downarrow a_{A,A,A} & & \swarrow \Delta \\
 \boxed{A} & & & & & & & \boxed{A} \\
 & \nwarrow m & & \downarrow a_{A,A,A} & & \downarrow a_{A,A,A} & & \nwarrow \Delta \\
 & A \otimes A & \xleftarrow{1_A \otimes m} & A \otimes (A \otimes A) & \xleftarrow{f \otimes (g \otimes h)} & A \otimes (A \otimes A) & \xleftarrow{1_A \otimes \Delta} & A \otimes A
 \end{array}$$

Das neutrale Element bzgl. $*$ ist $\eta\epsilon$.

- Ein Antipod einer Bialgebra $(A; \epsilon, \eta; m, \Delta)$ in \mathcal{A} ist eine Abbildung $S : A \rightarrow A$ in \mathcal{A} mit der Eigenschaft:

$$S * 1_A = 1_A * S = \eta\epsilon .$$

Terminologie: Objekte $(A; \epsilon, \eta; m, \Delta; S)$ mit allen obigen Eigenschaften heißen HOPF-(**Algebra**)-Objekte in \mathcal{A} . Sie bilden eine Kategorie mit denjenigen Bialgebra-Morphismen, welche mit den Antipoden vertauschen.

Für zwei Bialgebren $\mathbf{A}_1 := (A_1; \epsilon_1, \eta_1; m_1, \Delta_1)$ und $\mathbf{A}_2 := (A_2; \epsilon_2, \eta_2; m_2, \Delta_2)$ definieren wir analog die Faltung auf $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ durch

$$f * g := m_2(f \otimes g)\Delta_1 , \quad f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) .$$

Dann ist $(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2), *)$ ein assoziatives Monoid mit der Einheit $\eta_2\epsilon_1$. Die Faltung ist verträglich mit Verknüpfung nach links (bzw. nach rechts) mit Bialgebra-Morphismen.

SATZ 4.3. Sei $\mathbf{A} := (A; \epsilon, \eta; m, \Delta; S)$ eine Hopf-Algebra in \mathcal{A} . Dann ist:

$$\mathbf{A}^{op, cop} := (A; \epsilon, \eta; m^{op} := m\tau_{12}, \Delta^{cop} := \tau_{12}\Delta)$$

eine Bialgebra, und der Morphismus S induziert einen Bialgebra-Morphismus $S : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^{op, cop}$. (Dabei ist $\tau_{12} := c_{A, A}$.)

BEWEIS: Zu zeigen sind die Relationen:

$$\begin{aligned} Sm &= m^{op}(S \otimes S) : A \otimes A \rightarrow A , & S\eta &= \eta : I \rightarrow A , \\ (S \otimes S)\Delta &= \Delta^{cop}S : A \rightarrow A \otimes A , & \epsilon S &= \epsilon : A \rightarrow I . \end{aligned}$$

Wir "falten" geeignet diese Relationen, um sie zu beweisen:

- $S\eta = \eta$ ist äquivalent zu $\eta * S\eta = \eta * \eta$. Dies folgt aus $\eta * S\eta = (1_A * S)\eta = (\eta\epsilon)\eta = \eta(\epsilon\eta) = \eta = \eta * \eta$.
- Duales Argument: $\epsilon S * \epsilon = \epsilon(S * 1_A) = \epsilon(\eta\epsilon) = (\epsilon\eta)\epsilon = \epsilon = \epsilon * \epsilon$. Daraus folgt: $\epsilon S = \epsilon$.
- Wir beweisen nun $m * (Sm) = m * (m^{op}(S \otimes S))$ in $\mathcal{A}[A \otimes A \rightarrow A]$. Der erste Term ist einfach:

$$m * (Sm) = (1_A * S)m = (\eta\epsilon)m = m((\eta\epsilon) \otimes (\eta\epsilon)) .$$

Für den zweiten betrachten wir zuerst das Diagramm an der Seite 65 innerhalb der Abbildung 1:

Wir schreiben in diesem Diagramm und des weiteren einfach 1 statt 1_A . Der "linke Rand" des Diagramms hat als Verknüpfung

$$\begin{aligned} m(m \otimes m)((1 \otimes 1) \otimes ((S \otimes S)c_{A, A})) &\tau_{23}((1 \otimes 1) \otimes \Delta)(\Delta \otimes 1) \\ &= m(m \otimes (m^{op}(S \otimes S))) \Delta_{\otimes} = m * (m^{op}(S \otimes S)). \end{aligned}$$

Der "rechte Rand" ist:

$$\begin{aligned} m(1 \otimes m) &(1 \otimes (m \otimes 1))(1 \otimes ((1 \otimes S) \otimes S)(1 \otimes (\Delta \otimes 1))) (1 \otimes c_{A, A})a_{A, A, A}(\Delta \otimes 1) \\ &= m(1 \otimes m) \quad 1 \otimes ((1 * S) \otimes S) \quad (1 \otimes c_{A, A})a_{A, A, A}(\Delta \otimes 1) \\ &= m(1 \otimes m) \quad 1 \otimes ((\eta\epsilon) \otimes S) \quad (1 \otimes c_{A, A})a_{A, A, A}(\Delta \otimes 1) \\ &= m(1 \otimes (m((\eta\epsilon) \otimes S)c_{A, A})) \quad a_{A, A, A}(\Delta \otimes 1) \\ &= m(1 \otimes (m((\eta \otimes 1)(\epsilon \otimes S)c_{A, A})) \quad a_{A, A, A}(\Delta \otimes 1) \\ &= m(1 \otimes (u_A c_{A, I}(S \otimes \epsilon))) \quad a_{A, A, A}(\Delta \otimes 1) \\ &= m(1 \otimes (u_A(S \otimes \epsilon))) \quad a_{A, A, A}(\Delta \otimes 1) \\ &= m(1 \otimes (m((1 \otimes \eta)(S \otimes \epsilon))) \quad a_{A, A, A}(\Delta \otimes 1) \\ &= m(1 \otimes m) (1 \otimes (S \otimes (\eta\epsilon))) \quad a_{A, A, A}(\Delta \otimes 1) \\ &= m(m \otimes 1) (1 \otimes S) \otimes (\eta\epsilon) \quad (\Delta \otimes 1) \\ &= m((m(1 \otimes S)\Delta) \otimes (\eta\epsilon)) \\ &= m((1 * S) \otimes (\eta\epsilon)) \\ &= m((\eta\epsilon) \otimes (\eta\epsilon)) . \end{aligned}$$

- Die Relation $(S \otimes S)\Delta = \Delta^{cop}S : A \rightarrow A \otimes A$ folgt dual.

DEFINITION 4.4. Eine ACU-Tensor-Kategorie heißt symmetrisch, falls für alle Objekte $A, B \in \mathcal{A}$ gilt:

$$c_{B, A}c_{A, B} = 1_{A \otimes B} .$$

Für unsere Zwecke können wir uns auf symmetrische Tensor-Kategorien beschränken, um technischen Details auszuweichen.

SATZ 4.5. Sei \mathcal{A} eine symmetrische Tensor-Kategorie. Sei $\mathbf{A} = (A; \epsilon, \eta; m, \Delta; S)$ eine HOPF-Algebra in \mathcal{A} . Dann sind äquivalent:

- (i) $S^2 = 1_A$,

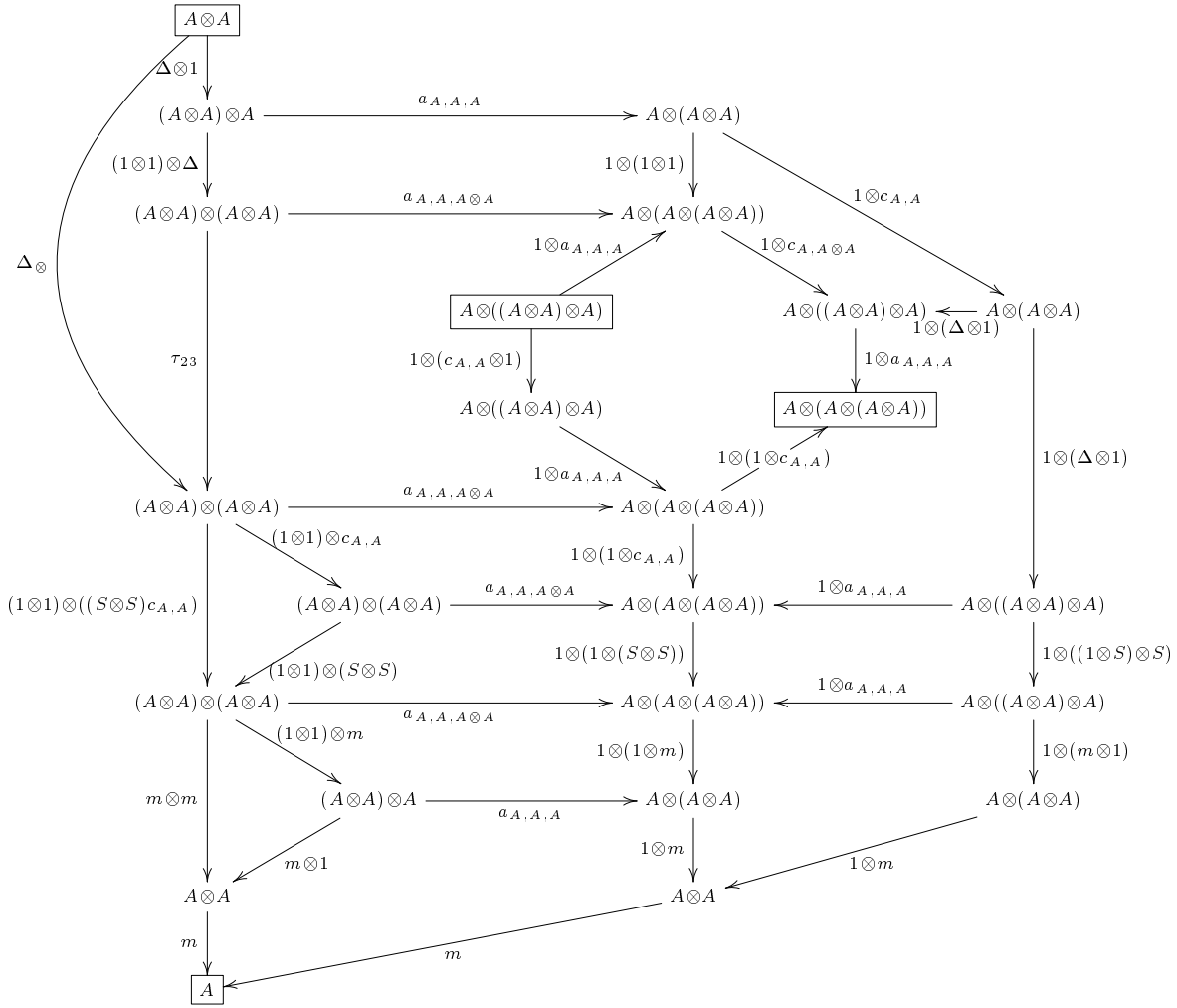


ABBILDUNG 1. Handhabung von Assoziativitäts- und Kommutativitäts-Konstanten im Beweis des Satzes 4.3

- (ii) $m^{op}(1_A \otimes S)\Delta = \eta\epsilon$,
- (iii) $m^{op}(S \otimes 1_A)\Delta = \eta\epsilon$.

Insbesondere gilt $S^2 = 1_A$, falls \mathbf{A} kommutativ (oder -dual- kokommutativ) ist.

BEWEIS: Aus $Sm = m^{op}(S \otimes S) = m(S \otimes S)c_{A,A}$ folgt $Sm^{op} = m(S \otimes S)c_{A,A} = m(S \otimes S)$. Wir bemerken zuerst die Gleichheit:

$$(50) \quad S * (S^2) = m(S \otimes (S^2))\Delta = m(S \otimes S)(1_A \otimes S)\Delta = Sm^{op}(1_A \otimes S)\Delta.$$

[(i) \Rightarrow (ii)] Ist $S^2 = 1_A$, so ergibt (50):

$$m^{op}(1_A \otimes S)\Delta = (S^2) m^{op}(1_A \otimes S)\Delta = S(Sm^{op}(1_A \otimes S)\Delta) = S(S * (S^2)) = S(S * 1_A) = S\eta\epsilon = \eta\epsilon.$$

[(ii) \Rightarrow (i)] Ist $m^{op}(1_A \otimes S)\Delta = \eta\epsilon$, so ergibt (50): $S * (S^2) = S\eta\epsilon = \eta\epsilon = S * 1_A$, und wir kürzen den Faltungsfaktor S . \square

4.3. Tensor-Kategorien mit (T, t) -Daten.

DEFINITION 4.6. Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie, versehen mit

- einem additiven Verschiebungsfunktor $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$,
- einer natürlichen Äquivalenz $t : id_{\mathcal{A}} \rightarrow T$, auf Objekten $A \in Ob\mathcal{A}$: $t_A : A \rightarrow TA$, mit der Eigenschaft $t_{TA} = Tt_A$,
- der Struktur einer ACU-Tensor-Kategorie.

Wir verlangen des weiteren die Existenz natürlicher Äquivalenzen j^l und j^r :

$$\begin{aligned} \otimes(1_{\mathcal{A}} \times T) &\xlongequal{j^r} T \otimes \xlongequal{j^l} \otimes(T \times 1_{\mathcal{A}}) \quad , \quad \text{oder auf Objekten } A, B \in \text{Ob}\mathcal{A}: \\ A \otimes TB &\xleftarrow{j_{A,B}^r} T(A \otimes B) \xrightarrow{j_{A,B}^l} TA \otimes B \quad , \end{aligned}$$

so daß kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & T^2(A \otimes B) & \\ Tj_{A,B}^r \swarrow & & \searrow Tj_{A,B}^l \\ T(A \otimes TB) & & T(TA \otimes B) \\ j_{A,TB}^l \searrow & & \swarrow j_{TA,B}^r \\ & TA \otimes TB & \end{array}$$

Zusätzlich verlangen wir die natürliche Kommutativität für Objekte $A, B, C \in \mathcal{A}$ der Diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} (TA \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{a_{TA,B,C}} & TA \otimes (B \otimes C) & (A \otimes TB) \otimes C & \xrightarrow{a_{A,TB,C}} & A \otimes (TB \otimes C) & (A \otimes B) \otimes TC & \xrightarrow{a_{A,B,TC}} & A \otimes (B \otimes TC) \\ j_{A,B}^l \otimes 1_C \uparrow & & \parallel & j_{A,B}^r \otimes 1_C \uparrow & & \uparrow 1_A \otimes j_{B,C}^l & \parallel & & \uparrow 1_A \otimes j_{B,C}^r \\ T(A \otimes B) \otimes C & & TA \otimes (B \otimes C) & T(A \otimes B) \otimes C & & A \otimes (TB \otimes C) & (A \otimes B) \otimes TC & & A \otimes T(B \otimes C) \\ j_{A \otimes B, C}^l \uparrow & & \uparrow j_{A,B \otimes C}^l & j_{A \otimes B, C}^l \uparrow & & \uparrow j_{A,B \otimes C}^r & j_{A \otimes B, C}^r \uparrow & & \uparrow j_{A,B \otimes C}^r \\ T((A \otimes B) \otimes C) & \xrightarrow{Ta_{A,B,C}} & T(A \otimes (B \otimes C)) & T(A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{Ta_{A,B,C}} & T(A \otimes (B \otimes C)) & T(A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{Ta_{A,B,C}} & T(A \otimes (B \otimes C)) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccc} T(A \otimes B) & \xrightarrow{Tc_{A,B}} & T(B \otimes A) & \xrightarrow{Tc_{B,A}} & T(A \otimes B) \\ j_{A,B}^l \downarrow & & \downarrow j_{A,B}^r & & \downarrow j_{A,B}^l \\ TA \otimes B & \xrightarrow{c_{TA,B}} & B \otimes TA & \xrightarrow{c_{B,TA}} & TA \otimes B \end{array}$$

Dann nennen wir \mathcal{A} eine **Tensor-Kategorie mit (T, t) -Daten**.

4.4. Die additive Kategorie $\mathcal{H}(\mathcal{A})$.

DEFINITION 4.7. Sei \mathcal{A} eine Tensor-Kategorie mit (T, t) -Daten. Wir bezeichnen durch $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ die additive Kategorie mit folgenden Daten:

Objekte: HOPF-Algebra-Objekte $\mathbf{A} = (A; \epsilon, \eta; m, \Delta; S)$, so daß die Multiplikation m kommutativ ist, und die Komultiplikation Δ kokommutativ.

Morphismen: HOPF-Algebra-Morphismen.

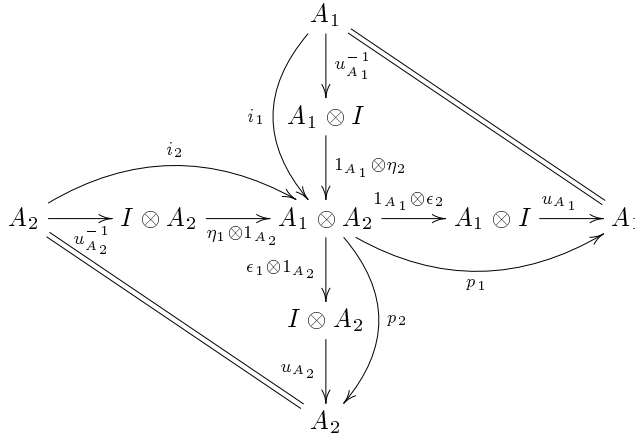
Gruppstruktur auf $\text{Hom}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$ für $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \text{Ob}\mathcal{H}(\mathcal{A})$: Die Faltung: Diese Operation ist kommutativ, da für $f, g \in \text{Hom}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$ gilt:

$$f * g = m(f \otimes g)\Delta = m^{op}c_{A_2, A_1}(f \otimes g)c_{A_1, A_1}\Delta^{cop} = m^{op}(g \otimes f)\Delta^{cop} = m(g \otimes f)\Delta = g * f.$$

Die Einheit in $(\text{Hom}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2), *)$ ist $\eta_2\epsilon_1$.

Das Inverse zu f ist $S_2f = fS_1$, da gilt: $f * (S_2f) = (1_{A_2} * S_2)f = \eta_2\epsilon_2f = \eta_2\epsilon_1$.

Direkte Summe und Produkt: Für $A_1, A_2 \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ definieren wir Morphismen $i_1, i_2; p_1, p_2$ wie folgt:

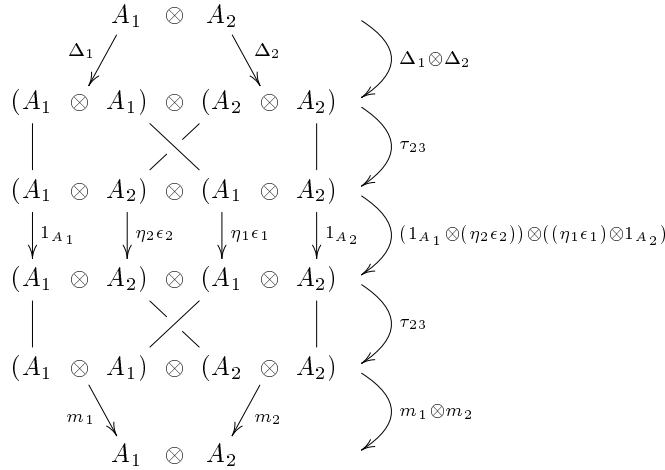


$$\begin{aligned}
 i_1 &= (1_{A_1} \otimes \eta_2) u_{A_1}^{-1} \\
 i_2 &= (\eta_1 \otimes 1_{A_2}) u_{A_2}^{-1} \\
 p_1 &= u_{A_1} (1_{A_1} \otimes \epsilon_2) \\
 p_2 &= u_{A_2} (\epsilon_1 \otimes 1_{A_2}) \\
 p_1 i_1 &= 1_{A_1} \\
 p_2 i_1 &= \eta_2 \epsilon_1 \\
 p_1 i_2 &= \eta_1 \epsilon_2 \\
 p_2 i_2 &= 1_{A_2} \\
 (i_1 p_1) * (i_2 p_2) &= 1_{A_1 \otimes A_2}
 \end{aligned}$$

Die Gleichheit $(i_1 p_1) * (i_2 p_2) = 1_{A_1 \otimes A_2}$ folgt aus:

$$\begin{aligned}
 (i_1 p_1) * (i_2 p_2) &= (1_{A_1} \otimes (\eta_2 \epsilon_2)) * ((\eta_1 \epsilon_1) \otimes 1_{A_2}) \\
 &= (m_1 \otimes m_2) \tau_{23} ((1_{A_1} \otimes (\eta_2 \epsilon_2)) \otimes ((\eta_1 \epsilon_1) \otimes 1_{A_2})) \\
 &= (m_1 (1_{A_1} \otimes (\eta_1 \epsilon_1)) \Delta_1) \otimes (m_2 ((\eta_2 \epsilon_2) \otimes 1_{A_2}) \Delta_2) \\
 &= (1_{A_1} * (\eta_1 \epsilon_1)) \otimes ((\eta_2 \epsilon_2) * 1_{A_2}) = 1_{A_1} \otimes 1_{A_2} = 1_{A_1 \otimes A_2}.
 \end{aligned}$$

Ein formales Bild dazu:



Der Verschiebungsfunktor T auf \mathcal{A} induziert einen Verschiebungsfunktor T auf $\mathcal{H}(\mathcal{A})$:

Für $\mathbf{A} = (A; \epsilon, \eta, m, \Delta; S) \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ definieren wir die Morphismen aus $T\mathbf{A} = (TA; \epsilon', \eta'; m', \Delta'; S') \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ durch die Verknüpfungen:

$$\begin{aligned}
 \epsilon' : TA &\xrightarrow{t_A^{-1}} A \xrightarrow{\epsilon} I \\
 \eta' : I &\xrightarrow{\eta} A \xrightarrow{t_A} TA \\
 m' : TA \otimes TA &\xrightarrow{\cong} T^2(A \otimes A) \xrightarrow{T^2 m} T^2 A \xrightarrow{t_{TA}^{-1}} TA \\
 \Delta' : TA &\xrightarrow{T\Delta} T(A \otimes A) \xrightarrow{T t_A \otimes A} T^2(A \otimes A) \xrightarrow{\cong} TA \otimes TA \\
 S' : TA &\xrightarrow{TS} TA
 \end{aligned}$$

Die Axiome für $T\mathbf{A}$ folgen von den korrespondierenden Axiomen für \mathbf{A} .

4.5. Der Funktor $J : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$. Sei \mathcal{A} eine Tensor-Kategorie. Dann ist auch die Homotopie-Kategorie eine Tensor-Kategorie. Sie hat einen natürlichen Verschiebungsfunktor T .

Sei I der im Grad Null getragene Komplex mit Null-Eintrag gleich zu I .

Wir betrachten den **nicht**-additiven Funktor:

$$J : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{K}(\mathcal{A})),$$

gegeben durch $JA := (I \oplus A; \epsilon, \eta; m, \Delta; S)$ für $A \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$, wobei die Daten in JA wie folgt definiert sind:

• $\epsilon : JA = I \oplus A \rightarrow I$ ist die kanonische Projektion. Arbeiten wir mit Repräsentanten $(\lambda, x) \in I \oplus A$ in einer Kategorie von Moduln über einem Ring k , so gilt $\epsilon(\lambda, x) = \lambda$ für $\lambda \in k$, $x \in A$. Wir schreiben 1 für die Einheit in k .

• $\eta : I \rightarrow I \oplus A = JA$ ist die kanonische Inklusion. Formal $\eta(\lambda) := (\lambda, 0)$.

• $m : JA \otimes JA = (I \oplus A) \otimes (I \oplus A) \cong I \otimes I \oplus I \otimes A \oplus A \otimes I \oplus A \otimes A \rightarrow I \otimes I \oplus I \otimes A \oplus A \otimes I \oplus A \otimes A$
 $\cong I \oplus A \oplus A \rightarrow I \oplus A = JA$.

Dabei ist die Abbildung $I \oplus A \oplus A \rightarrow I \oplus A$ formal durch $(\lambda, x, y) \rightarrow (\lambda, x + y)$ gegeben. Formal $(\lambda, x) \cdot (\mu, y) = (\lambda\mu, \lambda y + x\mu)$.

• $\Delta : JA = I \oplus A \rightarrow I \oplus A \oplus A \cong I \otimes I \oplus I \otimes A \oplus A \otimes I \rightarrow I \otimes I \oplus I \otimes A \oplus A \otimes I \oplus A \otimes A$
 $\cong (I \oplus A) \otimes (I \oplus A) = JA \otimes JA$.

Dabei ist die Abbildung $I \oplus A \rightarrow I \oplus A \oplus A$ formal gegeben durch $(\lambda, x) \rightarrow (\lambda, x, x)$. Es folgt formal: $\Delta(\lambda, 0) = \lambda \otimes 1 = 1 \otimes \lambda$, $\Delta(0, x) = 1 \otimes x \oplus x \otimes 1$.

• $S : JA \rightarrow JA$ ist die Identität auf I und minus Identität auf A : Formal: $S(\lambda, x) := (\lambda, -x)$.

Man kann leicht feststellen, daß JA ein HOPF-Objekt ist. Es gilt zum Beispiel formal:

$$\begin{aligned} (S * \text{id})(\lambda, x) &= m(S \otimes \text{id})\Delta(\lambda, x) = m(S \otimes \text{id})((\lambda, 0) \otimes (1, 0) + (0, x) \otimes (1, 0) + (1, 0) \otimes (0, x)) \\ &= m(S(\lambda, 0) \otimes (1, 0) + S(0, x) \otimes (1, 0) + S(1, 0) \otimes (0, x)) \\ &= m((\lambda, 0) \otimes (1, 0) + (0, -x) \otimes (1, 0) + (1, 0) \otimes (0, x)) \\ &= (\lambda, 0) + (0, -x) + (0, x) = (\lambda, 0) = \eta\epsilon(\lambda, x). \end{aligned}$$

5. Der Funktor $\mathbb{Z}K(\mathcal{P}_-)$ im Rahmen von geometrischen und absoluten Kohomologie-Theorien

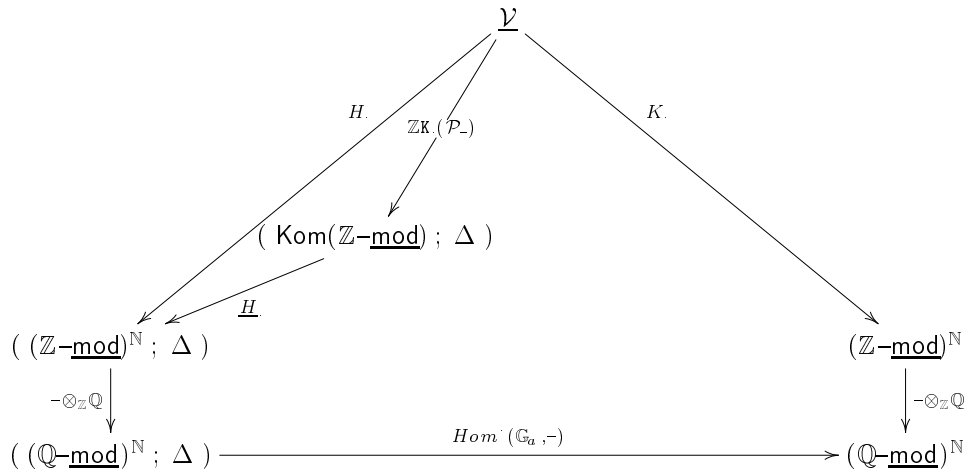
Sei $\underline{\mathcal{V}}$ die Kategorie der glatten, projektiven Schemata vom endlichen Typ über einem Körper F .

Für ein Objekt X in $\underline{\mathcal{V}}$ sei \mathcal{P}_X die Kategorie der lokalfreien Garben (i.e. der Vektorbündel) über X . Wir bezeichnen durch \mathcal{P}_- den kontravarianten Funktor $X \rightarrow \mathcal{P}_X$. So ist $\mathbb{Z}K(\mathcal{P}_-)$ der Funktor, welcher objektweise zuordnet: $X \rightarrow \mathbb{Z}K(\mathcal{P}_X)$.

Wir haben folgende Funktoren bereits eingeführt:

$$\mathbb{Z}[\mathcal{GP}_X]; \mathbb{Z}[\mathcal{KG}^\perp \mathcal{P}_X]^{na}, \mathbb{Z}[\text{erwKG}^\perp \mathcal{P}_X]^{na}; \mathbb{Z}K^{[0,2]}(\mathcal{P}_X), \mathbb{Z}K(\mathcal{P}_X).$$

Diese Funktoren tragen eine kanonische Struktur einer Koalgebra über \mathbb{Z} . Tensorieren wir diese Komplexe mit \mathbb{Q} , so schreiben wir \mathbb{Q} statt \mathbb{Z} in ihrer Notation. Wir können nun in weiter Analogie zum Diagramm (39) folgendes kommutative Diagramm mit einem dieser Funktoren bilden:



$(\text{Kom}(\mathbb{Z}\text{-mod}); \Delta)$ ist die Kategorie der Koalgebra-Objekte in der Kategorie der Komplexe von \mathbb{Z} -Moduln.

$(\mathbb{Z}\text{-mod})^{\mathbb{N}}; \Delta$ ist die Kategorie der Koalgebra-Objekte in der Kategorie der \mathbb{N} -graduierten \mathbb{Z} -Moduln.

$(\mathbb{Q}\text{-mod})^{\mathbb{N}}; \Delta$ ist die Kategorie der Koalgebra-Objekte in der Kategorie der \mathbb{N} -graduierten \mathbb{Q} -Moduln.

G_a ist die (einzige) Bialgebra $(k[T]; \epsilon, \eta; m, \Delta; S)$ über dem Ring $k = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, so daß $(k[T], \eta, m)$ das übliche Polynomialring in der Unbekannten T ist, und zusätzlich auf dem Erzeugenden T gilt: $\Delta(T) = 1 \otimes T + T \otimes 1$, $S(T) = -T$.

Der rechte Rand des obigen Diagramms berechnet die ganze bzw. rationale K-Theorie.

Die Funktoren $H(\cdot)$ und $H(\cdot)_{\mathbb{Q}}$ vom linken Rand bezeichnen wir als ganze bzw. rationale H -Theorie.

Kommentar: Die Kategorie der Koalgebra-Objekte ist keine triangulierte Kategorie. Aus diesem Grund ist die obige Analogie an einer wichtigen Stelle **nicht** zufriedenstellend. Man kann die Koalgebra-Struktur als Wertebereich von Funktoren aus $\underline{\mathcal{V}}$ bis auf die Struktur einer Bialgebra erweitern: Die Bar-Konstruktion ist eine Möglichkeit dafür. Es gibt jedoch Obstruktionen für die Einführung eines Antipodes in solchen Bar-Konstruktionen, und wir

können nicht die triangulierte Kategorie der HOPF-Algebra-Objekte als einen solchen Wertebereich schreiben. Frage: Welche Unterobjekte oder Quotienten der Bar-Konstruktion ermöglichen die Einführung eines Antipodes?!

5.1. Die Bar-Konstruktion als Bialgebra-Objekt. Wir benutzen des weiteren die Notationen aus dem Abschnitt "Die Bar-Konstruktion" an der Seite 15.

SATZ 5.1. *Die Bar-Konstruktion $(B(R); \epsilon, \eta; \sqcup, \Delta)$ ist ein Bialgebra-Objekt in der Kategorie der Komplexe von k -Moduln.*

BEWEIS: Wir bezeichnen das Bar-Symbol $[x_1 | \dots | x_{i-1} | x_i x_{i+1} | x_{i+2} | \dots | x_n]$ auch durch $[x_1 | \dots | x_i \overset{\vee}{|} x_{i+1} | \dots | x_n]$, wobei das Čech-Symbol über einem Trennungsstrich sein Entfallen bedeutet. Analog setzen wir $[x_1 | x_2 | \dots | x_n] := [x_2 | \dots | x_n]$ und $[x_1 | \dots | x_{n-1} x_n] := [x_1 | \dots | x_{n-1}]$.

1. Verträglichkeit von $\epsilon, \eta, \sqcup, \Delta$ mit dem Differential d : Die Abbildungen ϵ und η sind verträglich mit d . Für die **Komultiplikation** Δ gilt für $\xi = [x_1 | \dots | x_n] \in B_n(R)$:

$$\begin{aligned} d^{\otimes 2} \Delta \xi &= d^{\otimes 2} \Delta [x_1 | \dots | x_n] \\ &= d^{\otimes 2} \sum_{0 \leq p \leq n} [x_1 | \dots | x_p] \otimes [x_{p+1} | \dots | x_n] \\ (51) \quad &= \sum_{0 \leq p \leq n} \left\{ \sum_{0 \leq i \leq p} (-1)^i [x_1 | \dots | x_i \overset{\vee}{|} x_{i+1} | \dots | x_p] \otimes [x_{p+1} | \dots | x_n] \right. \\ &\quad \left. + (-1)^p \sum_{0 \leq i \leq (n-p)} (-1)^i [x_1 | \dots | x_p] \otimes [x_{p+1} | \dots | x_{p+i-1} \overset{\vee}{|} x_{p+i} | \dots | x_n] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta d \xi &= \Delta \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j [x_1 | \dots | x_j \overset{\vee}{|} x_{j+1} | \dots | x_n] \\ (52) \quad &= \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ p \neq j}} \left(\begin{array}{ll} [x_1 | \dots | x_j \overset{\vee}{|} x_{j+1} | \dots | x_p] \otimes [x_{p+1} | \dots | x_n] & \text{für } j < p \text{ oder} \\ [x_1 | \dots | x_p] \otimes [x_{p+1} | \dots | x_j \overset{\vee}{|} x_{j+1} | \dots | x_n] & \text{für } j > p. \end{array} \right) \end{aligned}$$

Im Ausdruck (51) liefern die obere Summe für $i = p$ und die untere Summe für $i = 0$ die Terme:

$$\begin{aligned} &(-1)^p [x_1 | \dots | x_{p-1}] \otimes [x_{p+1} | \dots | x_n] \text{ und respektive} \\ &(-1)^p [x_1 | \dots | x_p] \otimes [x_{p+2} | \dots | x_n]. \end{aligned}$$

Diese verschwinden nach Summation nach p , und es folgt die Gleichheit der Ausdrücke (51) und (52).

Für die **Multiplikation** \sqcup untersuchen wir zuerst die analoge Eigenschaft von ω .

Für $\xi = [x_1 | \dots | x_n] \in B_n(R)$, $\eta = [y_1 | \dots | y_m] \in B_m(R)$ mit der Eigenschaft, daß jedes x_i mit jedem y_j kommutiert, gilt nach Einführung der Notation

$$\zeta = \xi \eta = [x_1 | \dots | x_n | y_1 | \dots | y_m] =: [z_1 | \dots | z_{n+m}] \in B_{n+m}(R):$$

$$\begin{aligned} d(\xi \sqcup \eta) &= d \sum_{\sigma \in S(n,m)} (-1)^{|\sigma|} \zeta^\sigma \\ (53) \quad &= \sum_{\sigma \in S(n,m)} \sum_{0 \leq i \leq n+m} (-1)^{|\sigma|} (-1)^i [z_{\sigma(1)} | \dots | z_{\sigma(i)} \overset{\vee}{|} z_{\sigma(i+1)} | \dots | z_{\sigma(n+m)}]. \end{aligned}$$

Befinden sich für ein festes $\sigma \in S(n, m)$ unter $\{z_{\sigma(i)}, z_{\sigma(i+1)}\}$ sowohl x - als auch y -Bar-Faktoren, i.e. $\sigma(i) \leq n < \sigma(i+1)$ oder $\sigma(i) > n \geq \sigma(i+1)$, so ist auch $(i, i+1)\sigma \in S(n, m)$, und die Summanden aus (53) zu σ und $(i, i+1)\sigma$ kürzen sich wegen der geforderten Kommutativität zwischen jedem x_k und jedem y_l .

Wir betrachten nun nur sonstige $\sigma \in S(n, m)$ und beliebige i . Seien $T_n := \{1, \dots, n\}$, $T_m := \{1, \dots, m\}$, und wir identifizieren $T_1 \sqcup T_2$ mit $\{1, \dots, n+m\}$ durch die monotonen bijektiven Abbildungen $T_n = \{1, \dots, n\} \subseteq \{1, \dots, n+m\}$, $T_m := \{1, \dots, m\} \cong \{n+1, \dots, n+m\} \subseteq \{1, \dots, n+m\}$.

So ist $\sigma \in S(n, m) =: S(T_n, T_m)$ und wir definiert die Permutation σ^{vi} eindeutig durch das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} T_n \sqcup T_m & \xleftarrow{\cong} & i \sqcup ((T_n \sqcup T_m) \setminus i) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow (i \mapsto \sigma(i)) \sqcup \sigma^{vi} \\ T_n \sqcup T_m & \xleftarrow{\cong} & \sigma(i) \sqcup ((T_n \sqcup T_m) \setminus \sigma(i)) \end{array}$$

Insbesondere ist das Signum der Permutation σ^{vi} gleich $(-1)^{i-\sigma(i)}(-1)^{|\sigma|}$. Es gilt also:

$$(-1)^{|\sigma|}(-1)^i[z_{\sigma(1)}|\dots|\underbrace{z_{\sigma(i)}}_{\substack{x_{\sigma(i)} \\ \text{oder} \\ y_{\sigma(i)-n}}}|\dots|\underbrace{z_{\sigma(i+1)}}_{\substack{x_{\sigma(i)+1} \\ \text{oder} \\ y_{\sigma(i)+1-n}}}\dots|z_{\sigma(n+m)}] = (-1)^{|\sigma^{vi}|}(-1)^{\sigma(i)}(\partial_{\sigma(i)}[z_1|\dots|z_{n+m}])^{\sigma^{vi}}.$$

Die Permutation σ^{vi} ist auch eine Shuffle-Permutation in $S(T_n \setminus i, T_m)$ oder $S(T_n, T_m \setminus i)$. Die letzte Gleichheit erlaubt die Umformung von (53), so daß anschließend

$$d(\xi \sqcup \eta) = (d\xi) \sqcup \eta + (-1)^n \xi \sqcup (d\eta)$$

folgt. Insbesondere:

$$\begin{aligned} d(\xi \sqcup \eta) &= d(I^1 \xi \sqcup I^2 \eta) = (dI^1 \xi) \sqcup I^2 \eta + (-1)^n I^1 \xi \sqcup (dI^2 \eta) = I^1(d\xi) \sqcup I^2 \eta + (-1)^n I^1 \xi \sqcup I^2(d\eta) \\ &= (d\xi) \sqcup \eta + (-1)^n \xi \sqcup (d\eta). \end{aligned}$$

2. $(B.(R); \epsilon, \sqcup)$ ist ein Algebra-Objekt. Seien $\xi \in B_n(R)$, $\eta \in B_m(R)$, $\zeta \in B_k(R)$ Basiselemente. Es gilt:

$$\begin{aligned} (\xi \sqcup \eta) \sqcup \zeta &= \sum_{\sigma \in S(n,m)} (-1)^{|\sigma|} (\xi \eta)^\sigma \sqcup \zeta = \sum_{\substack{\sigma \in S(n,m) \\ \tau \in S(n+m,k)}} (-1)^{|\sigma|} (-1)^{|\tau|} ((\xi \eta)^\sigma \zeta)^\tau \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S(n,m) \\ \tau \in S(n+m,k)}} (-1)^{|\tau(\sigma \sqcup \text{id}_k)|} (\xi \eta \zeta)^{\tau(\sigma \sqcup \text{id}_k)} = \sum_{\substack{\nu := \tau(\sigma \sqcup \text{id}_k) \\ \in S(n,m,k)}} (-1)^{|\nu|} (\xi \eta \zeta)^\nu. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\xi \sqcup (\eta \sqcup \zeta)$ kann analog zum letzten symmetrischen Ergebnis gebracht werden. Es folgt auch $(\xi \sqcup \eta) \sqcup \zeta = \xi \sqcup (\eta \sqcup \zeta)$.

Auch gilt $\xi = \xi \sqcup \emptyset = \xi \sqcup \emptyset = \emptyset \sqcup \xi = \emptyset \sqcup \xi$.

3. $(B.(R); \eta, \Delta)$ ist ein Koalgebra-Objekt. Sei $\xi \in B_n(R)$ ein Basiselement. Es gilt:

$$\begin{aligned} (1 \otimes \Delta) \Delta \xi &= (1 \otimes \Delta) \sum_{\xi_1 \xi_2 = \xi} \xi_1 \otimes \xi_2 \\ &= \sum_{\xi_1 \xi_2 = \xi} \xi_1 \otimes \Delta \xi_2 \\ &= \sum_{\xi_1 \xi_2 = \xi} \sum_{\xi_{21} \xi_{22} = \xi_2} \xi_1 \otimes (\xi_{21} \otimes \xi_{22}) \\ &= \sum_{x i_1 \xi_2 \xi_3 = \xi} \xi_1 \otimes (\xi_2 \otimes \xi_3). \quad \text{Analog folgt:} \\ (\Delta \otimes 1) \Delta \xi &= \sum_{x i_1 \xi_2 \xi_3 = \xi} (\xi_1 \otimes \xi_2) \otimes \xi_3. \end{aligned}$$

Auch gilt:

$$(1 \otimes \epsilon) \Delta \xi = (1 \otimes \epsilon) \sum_{\xi_1 \xi_2 = \xi} \xi_1 \otimes \xi_2 = (1 \otimes \epsilon) \sum_{\substack{\xi_1 \xi_2 = \xi \\ \xi_2 = \emptyset}} \xi_1 \otimes \xi_2 = (1 \otimes \epsilon)(\xi \otimes \emptyset) = \xi \otimes 1_k \cong \xi.$$

4. Verträglichkeit zwischen der Algebra- und der Koalgebra-Struktur.

Wir zeigen nur $\Delta \sqcup = (\sqcup \otimes \sqcup) \tau_{23}(\Delta \otimes \Delta)$. Die anderen Axiome folgen direkt aus Definitionen. Seien $\xi \in B_n(R)$, $\eta \in B_m(R)$. Wir bezeichnen erneut durch T_n, T_m die Indexmengen zu den Bar-Faktoren aus ξ resp. η . Es gilt:

$$\begin{aligned} \Delta \sqcup (\xi \otimes \eta) &= \Delta \sum_{\sigma \in S(T_n, T_m)} (-1)^{|\sigma|} (\xi \eta)^\sigma \\ (54) \quad &= \sum_{\substack{\sigma \in S(T_n, T_m) \\ 0 \leq p \leq n+m}} (-1)^{|\sigma|} (\text{Erste } p \text{ Bar-Faktoren in } (\xi \eta)^\sigma) \otimes (\text{Letzte } (n-p) \text{ Bar-Faktoren}) \end{aligned}$$

Für feste σ, p definieren wir:

$$\begin{aligned} T_{n1} &:= \{i \in T_n : \sigma(i) \leq p\} & T_{n2} &:= \{i \in T_n : \sigma(i) > p\} \\ T_{m1} &:= \{i \in T_m : \sigma(i) \leq p\} & T_{m2} &:= \{i \in T_m : \sigma(i) > p\} \end{aligned}$$

p bestimmt diese disjunkten Zerlegungen $T_n = T_{n1} \sqcup T_{n2}$, $T_m = T_{m1} \sqcup T_{m2}$, und umgekehrt bestimmen zwei solche Zerlegungen p als Kardinalität von $T_{n1} \sqcup T_{m1}$. Wir können anschließend für σ eindeutig Shuffle-Permutationen $\sigma_1 \in S(T_{n1}, T_{m1})$ und $\sigma_2 \in S(T_{n2}, T_{m2})$ zuordnen, so daß σ die Verknüpfung ist:

$$T_n \sqcup T_m \stackrel{=}{=} (T_{n1} \sqcup T_{n2}) \sqcup (T_{m1} \sqcup T_{m2}) \longrightarrow (T_{n1} \sqcup T_{m1}) \sqcup (T_{n2} \sqcup T_{m2}) \xrightarrow{\sigma_1 \sqcup \sigma_2} (T_{n1} \sqcup T_{m1}) \sqcup (T_{n2} \sqcup T_{m2})$$

Insbesondere ist $(-1)^{|\sigma|} = (-1)^{|T_{n2}||T_{m1}|}(-1)^{|\sigma_1 \sqcup \sigma_2|} = (-1)^{|T_{n2}||T_{m1}|}(-1)^{|\sigma_1|}(-1)^{|\sigma_2|}$. Wir schreiben $\xi = \xi_1 \xi_2$, $\eta = \eta_1 \eta_2$, so daß ξ_1 aus $|T_{n1}|$ Bar-Faktoren und η_1 aus $|T_{m1}|$ Bar-Faktoren bestehen. Wir können die Rechnung nach (54) fortsetzen:

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma \in S(n, m)} \sum_{\substack{\xi_1 \xi_2 = \xi \\ \eta_1 \eta_2 = \eta}} (-1)^{|\sigma|} (\xi_1 \eta_1)^{\sigma_1} \otimes (\xi_2 \eta_2)^{\sigma_2} \\ &= \sum_{\substack{\xi_1 \xi_2 = \xi \\ \eta_1 \eta_2 = \eta}} \sum_{\substack{\sigma_1 \in S(T_{n1}, T_{m1}) \\ \sigma_2 \in S(T_{n2}, T_{m2})}} (-1)^{|\sigma_1|} (-1)^{|\sigma_2|} (-1)^{|T_{n2}||T_{m1}|} (\xi_1 \eta_1)^{\sigma_1} \otimes (\xi_2 \eta_2)^{\sigma_2} \\ &= (\mathfrak{w} \otimes \mathfrak{w}) \sum_{\substack{\xi_1 \xi_2 = \xi \\ \eta_1 \eta_2 = \eta}} (-1)^{|T_{n2}||T_{m1}|} (\xi_1 \otimes \eta_1) \otimes (\xi_2 \otimes \eta_2) \\ &= (\mathfrak{w} \otimes \mathfrak{w}) \tau_{23} \sum_{\substack{\xi_1 \xi_2 = \xi \\ \eta_1 \eta_2 = \eta}} (\xi_1 \otimes \xi_2) \otimes (\eta_1 \otimes \eta_2) \\ &= (\mathfrak{w} \otimes \mathfrak{w}) \tau_{23} (\Delta \otimes \Delta) (\xi \otimes \eta) . \end{aligned}$$

□

SATZ 5.2. S ist ein Antimorphismus auf $(B.(R); \epsilon, \eta; \mathbb{W}, \Delta)$.

BEWEIS: Verträglichkeit von S und d :

$$\begin{aligned} &d S[x_1 | \dots | x_n] \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d [x_n^{-1} | \dots | x_1^{-1}] \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^{n-i-1} [x_n^{-1} | \dots | x_{i+1}^{-1} \overset{\vee}{|} x_i^{-1} | \dots | x_1^{-1}] \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^{n-i-1} S [x_1 | \dots | x_i \overset{\vee}{|} x_{i+1} | \dots | x_n] \\ &= S \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i [x_1 | \dots | x_i \overset{\vee}{|} x_{i+1} | \dots | x_n] \\ &= S d \xi \end{aligned}$$

Aus der Definition folgt $S[\] = [\]$, also $S\eta = \eta$, $\epsilon S = \epsilon$.

$$\begin{aligned}
& S([x_1 | \dots | x_n] \wr [y_1 | \dots | y_m]) \\
&= S \sum_{\sigma \in S(n, m)} (-1)^{|\sigma|} [x_1 | \dots | x_n | y_1 | \dots | y_m]^\sigma \\
&= \sum_{\sigma \in S(n, m)} (-1)^{|\sigma|} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} ([x_1^{-1} | \dots | x_n^{-1} | y_1^{-1} | \dots | y_m^{-1}]^\sigma)^{\text{inv}}, \text{ wobei } k := n + m, \\
&= \sum_{\sigma \in S(n, m)} (-1)^{|\sigma|} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} ([x_1^{-1} | \dots | x_n^{-1} | y_1^{-1} | \dots | y_m^{-1}]^{\text{inv}})^{\text{inv} \circ \sigma} \\
&= \sum_{\substack{\tau := \text{inv} \circ \sigma \\ \in S(m, n)}} (-1)^{|\tau|} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} [y_m^{-1} | \dots | y_1^{-1} | x_n^{-1} | \dots | x_1^{-1}]^\tau \\
&= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} [y_m^{-1} | \dots | y_1^{-1}] \wr [x_n^{-1} | \dots | x_1^{-1}] \\
&= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (S[y_1 | \dots | y_m]) \wr (S[x_1 | \dots | x_n]) \\
&= (-1)^{nm} (S[y_1 | \dots | y_m]) \wr (S[x_1 | \dots | x_n]).
\end{aligned}$$

So ist S ein Algebra-Antimorphismus.

$$\begin{aligned}
& \Delta S[x_1 | \dots | x_n] \\
&= \Delta (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} [x_n^{-1} | \dots | x_1^{-1}] \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{0 \leq p \leq n} [x_n^{-1} | \dots | x_{p-1}^{-1}] \otimes [x_p^{-1} | \dots | x_1^{-1}] \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{0 \leq p \leq n} (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} S[x_{p+1} | \dots | x_n] \otimes S[x_1 | \dots | x_p], \text{ wobei } q := n - p, \\
&= \sum_{0 \leq p \leq n} (-1)^{pq} (S \otimes S) [x_{p+1} | \dots | x_n] \otimes [x_1 | \dots | x_p] \\
&= \sum_{0 \leq p \leq n} (S \otimes S) \tau_{12} [x_1 | \dots | x_n] \otimes [x_{p+1} | \dots | x_n] \\
&= (S \otimes S) \tau_{12} \Delta [x_1 | \dots | x_n].
\end{aligned}$$

So ist S ein Koalgebra-Antimorphismus. □

5.2. Der Milnor-Anteil in der Bar-Konstruktion als Hopf-Algebra Objekt in der derivierten Kategorie von \mathbb{Z} -Moduln. Sei $T(F)$ die kommutative Untegruppe der Diagonalmatrizen aus der unendlichen generellen linearen Gruppe $GL(F)$ zum **Körper** F . Wir bezeichnen den Anteil $B.(T(F))^M$, multiplikativ erzeugt innerhalb der Bar-Konstruktion $B.(T(F))$ zu $T(F)$ von Symbolen $[x]$ im Grad Eins und von Symbolen der Form $[x|x^{-1}]$ im Grad 2, als MILNOR-Anteil in der Bar-Konstruktion $B.(GL(F))$ zu $GL(F)$.

SATZ 5.3. *Der MILNOR-Anteil der Bar-Konstruktion $(B.(T(F))^M; \epsilon, \eta; \wr, \Delta; S)$ zur kommutativen Gruppe $T(F)$ ist ein HOPF-Algebra Objekt in der derivierten Kategorie von \mathbb{Z} -Moduln.*

BEWEIS: Wir haben bereits gesehen, daß S ein Antimorphismus ist. Die Shuffle-Multiplikation ist kommutativ. Ausgehend von diesen Tatsachen, zeigen wir durch ein Standard-Argument, daß gilt:

$$\begin{aligned}
& (S * 1) \wr = \wr (S * 1) \otimes (S * 1), \quad \text{oder auf Repräsentanten:} \\
& (S * 1) (\xi \wr \eta) = (S * 1) \xi \wr (S * 1) \eta, \quad \text{für } \xi, \eta \in B.(T(F))^M.
\end{aligned}$$

Wir unterdrücken weiter partiell die Rolle der Assoziativitäts- und Kommutativitäts-Konstanten, indem wir a bzw. τ für die "natürlichen" Kandidaten schreiben, und unterstützen die folgende Berechnung durch die zusätzlichen

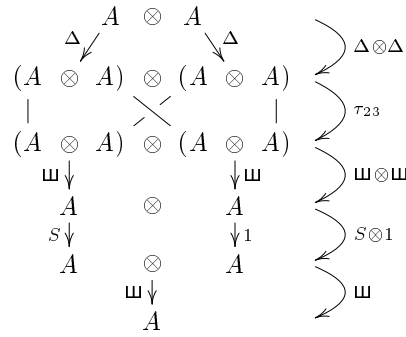


ABBILDUNG 2

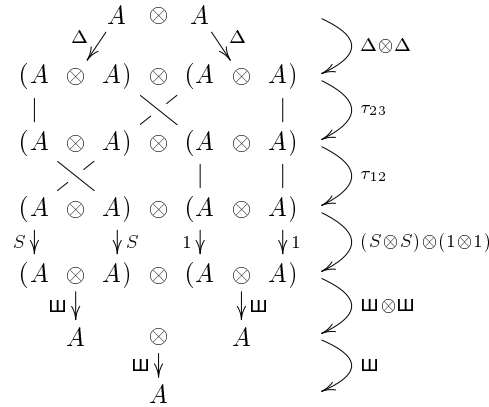


ABBILDUNG 3

Diagramme aus den Abbildungen 2, 3, 4, 5, 6:

$$(S * 1) \omega = \omega (S \otimes 1) \Delta \omega$$

$$= \omega (S \otimes 1) (\omega \otimes \omega) \tau_{23} (\Delta \otimes \Delta)$$

$$= \omega ((S\omega) \otimes \omega) \tau_{23} (\Delta \otimes \Delta)$$

$$= \omega ((\omega(S \otimes S) \tau_{12}) \otimes \omega) \tau_{23} (\Delta \otimes \Delta)$$

$$= \omega (\omega \otimes \omega) ((S \otimes S) \otimes (1 \otimes 1)) \tau_{12} \tau_{23} (\Delta \otimes \Delta)$$

$$= \omega (\omega \otimes 1) ((1 \otimes \omega) \otimes 1) ((S \otimes (S \otimes 1)) \otimes 1) \tau_{12} \tau_{23} (\Delta \otimes \Delta)$$

$$= \omega (\omega \otimes 1) \tau_{12} (((S * 1) \otimes S) \otimes 1) (1 \otimes \Delta)$$

$$= \omega (\omega \tau_{12} \otimes 1) \tau_{12} (((S * 1) \otimes S) \otimes 1) (1 \otimes \Delta)$$

$$= \omega (\omega \tau_{12} \otimes 1) \tau_{12} (((S * 1) \otimes S) \otimes 1) (1 \otimes \Delta)$$

$$= \omega (\omega \otimes 1) (((S * 1) \otimes S) \otimes 1) (1 \otimes \Delta)$$

$$= \omega (1 \otimes \omega) ((S * 1) \otimes (S \otimes 1)) (1 \otimes \Delta)$$

$$= \omega ((S * 1) \otimes (\omega(S \otimes 1)\Delta))$$

$$= \omega ((S * 1) \otimes (S * 1)) .$$

wie in der Abbildung 2,

da S Antimorphismus ist,

wie in der Abbildung 3,

wie in der Abbildung 4,

wie in der Abbildung 5,

da $\omega = \omega \tau_{12}$, Abbildung 6,

Diese Berechnung erlaubt die Reduktion auf multiplikative Erzeugende. Es gilt im Grad 0

$$(S * 1) [] = \omega(S \otimes 1)\Delta [] = \omega(S \otimes 1) [] \otimes [] = \omega [] \otimes [] = [] = \eta \epsilon [] .$$

Für ein erzeugendes Bar-Symbol $[x]$ im Grad 1 gilt:

$$(S * 1) [x] = \omega(S \otimes 1)\Delta [x] = \omega(S \otimes 1) ([x] \otimes [] + [] \otimes [x]) = \omega ([x^{-1}] \otimes [] + [] \otimes [x]) = [x] + [x^{-1}] = dH[x] ,$$

wobei $H[x] := [x|x^{-1}]$.

Für ein erzeugendes Bar-Symbol $[x|x^{-1}]$ im Grad 2 gilt:

$$(S * 1) [x|x^{-1}] = \omega(S \otimes 1)\Delta [x|x^{-1}] = \omega(S \otimes 1) ([x|x^{-1}] \otimes [] + [x] \otimes [x^{-1}] + [] \otimes [x|x^{-1}]) = \omega (-[x|x^{-1}] \otimes [] + [x^{-1}] \otimes [x^{-1}] + [] \otimes [x|x^{-1}]) = 0 . \text{ Wir setzen formal } H[x|x^{-1}] := 0 .$$

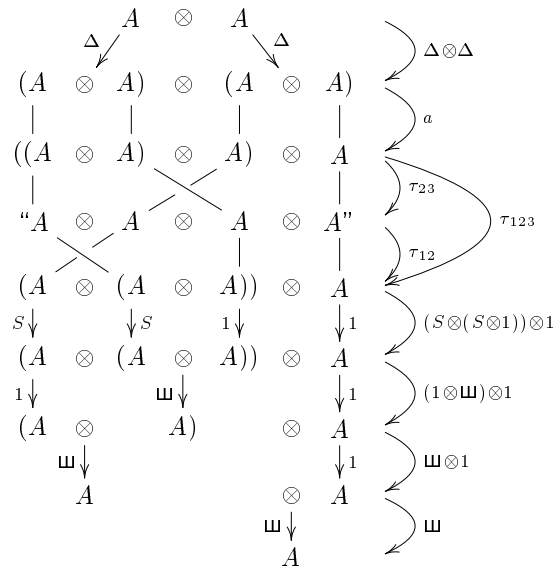


ABBILDUNG 4

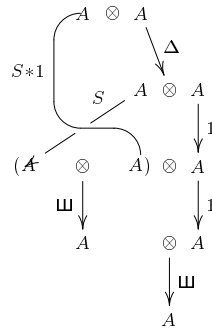


ABBILDUNG 5

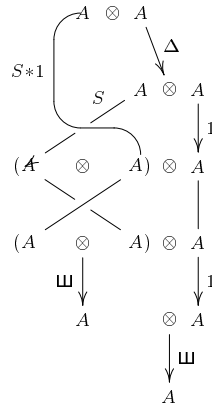


ABBILDUNG 6

Seien nun ξ_1, \dots, ξ_n Erzeugende der Form $[x]$ oder $[x|x^{-1}]$. Es gilt dann

$$(S*1)(\xi_1 \wr \dots \wr \xi_n) = ((S*1)\xi_1) \wr \dots \wr ((S*1)\xi_n) = (dH\xi_1) \wr \dots \wr (dH\xi_n) = d((H\xi_1) \wr (dH\xi_2) \wr \dots \wr (dH\xi_n)).$$

Analoge Rechnungen können für $1 * S$ statt $S * 1$ durchgeführt werden. Wir sehen, daß $S * 1$, $1 * S$ gleiche Abbildungen wie $\eta\epsilon$ in Homologie induzieren. \square

Symbole

1. Konstruktion von Elementen aus $\pi. ||\mathbf{KG}^\perp \mathcal{C}||^\perp$

1.1. Konstruktion von $s(\xi)$. Wir legen eine exakte Kategorie \mathcal{C} fest.

Sei $T := T_1 \times \cdots \times T_k$ das kartesische Produkt der \mathbb{Z} -Intervalle $T_1 := [m_1, n_1], \dots, T_k := [m_k, n_k]$. ($k \geq 1$ ganz.) Wir bezeichnen $m := (m_1, \dots, m_k)$, $n := (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k$. So ist T das Intervall $[m, n]$ in \mathbb{Z}^k .

Für jedes $I \in T$ sei ξ_I ein Element vom Grad k in der kubischen G-Konstruktion: $\xi_I \in \mathbf{KG}_k^\perp \mathcal{C}$. Wir verlangen von der Familie $\xi := (\xi_I)_{I \in T}$ folgende Eigenschaften:

Verklebe-Eigenschaft: Sei e_j der j -te kanonische Basisvektor von \mathbb{Z}^k , wobei $1 \leq j \leq k$. Wir benutzen des weiteren auch die Addition $+$ aus \mathbb{Z}^k . Die Verklebe-Eigenschaft lautet:

Für alle $I \in T$, so daß auch $I + e_j$ in T liegt gilt:

$$\partial_j^0 \xi_{I+e_j} = \partial_j^1 \xi_I.$$

Ränder-Ausartungen: Es gelten:

$\partial_j^0 \xi_I$ ist ausgeartet, falls die j -te Komponente von I gleich m_j ist,

$\partial_j^1 \xi_I$ ist ausgeartet, falls die j -te Komponente von I gleich n_j ist.

Sei $e := (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^k \subseteq \mathbb{R}^k$. Wir betrachten die Verknüpfung von Abbildungen, welche wir als $s(\xi)$ bezeichnen:

$$\begin{aligned} \square_k &= [0, 1]^k \cong [m_1, n_1 + 1]_{\mathbb{R}} \times [m_2, n_2 + 1]_{\mathbb{R}} \times \cdots \times [m_k, n_k + 1]_{\mathbb{R}} = [m, n + e]_{\mathbb{R}^k} \\ &= \left(\bigsqcup_{m \leq I \leq n} [I, I + e]_{\mathbb{R}^k} \right) / \sim \cong \left(\bigsqcup_{m \leq I \leq n} \square_k \right) / \sim \cong \left(\bigsqcup_{m \leq I \leq n} \{\xi_I\} \times \square_k \right) / \sim \\ &\rightarrow ||\mathbf{KG}^\perp \mathcal{C}||^\perp. \end{aligned}$$

Dabei ist die erste Erscheinung von \sim die Äquivalenzrelation, welche in der disjunkten Vereinigung aller \mathbb{R}^k -Intervalle der Form $[I, I + e]$ diejenigen Punkte von $[I, I + e]$ und $[I + e_j, I + e_j + e]$ identifiziert, welche in \mathbb{R}^k gleich sind. Die weiteren Erscheinungen von \sim meinen die (gleich bezeichnete) natürliche Übertragung dieser Äquivalenzrelation bzgl. der kanonischen Isomorphismen: $[I, I + e] \cong \square_k \cong \{\xi_I\} \times \square_k$.

Die Verklebe-Eigenschaft erlaubt in der obigen Verkettung die letzte Abbildung nach $||\mathbf{KG}^\perp \mathcal{C}||^\perp$ zu schreiben: Die Relation \sim geht in die Relation \approx der kubischen Realisierung über.

Die zweite Eigenschaft (- Ränder-Ausartungen -) bedeutet, daß der Rand von \square_k in \mathbb{R}^k durch $s(\xi)$ auf einen Punkt in $||\mathbf{KG}^\perp \mathcal{C}||^\perp$ abgebildet wird.

Wir können also $s(\xi)$ als Element in der Homotopie-Gruppe $\pi_k(||\mathbf{KG}^\perp \mathcal{C}||^\perp)$ ansehen. Diese ist eine Konstruktion von K-theoretischen Elementen, wie des weiteren erklärt:

1.2. K-theoretische Deutung.

1.2.1. Die H-Raum-Struktur der \mathbf{KG}^\perp -Konstruktion. Die \mathbf{KG}^\perp -Konstruktion ist natürlich versehen mit der Struktur eines H-Raumes, welche von der direkten Summe \oplus stammt. Wir skizzieren ihre Einführung:

Seien $\xi' := (\xi'_+, \xi'_-; \eta')$ und $\xi'' := (\xi''_+, \xi''_-; \eta'')$ kubische Elemente von Graden n' resp. n'' . Wir definieren eine Addition $+$ für zwei Elemente aus $\{\xi'\} \times \square_{n'}$ und resp. $\{\xi''\} \times \square_{n''}$. Durch Konstruktion landet diese Addition in $\{\xi\} \times \square_n$, wobei $n := n' + n''$ und $\xi := \xi' \oplus \xi''$ wird des weiteren näher beschrieben:

Die direkte Summe steht des weiteren für das einzige erwähnte Objekt, welches eine direkte Summe ist. Seien $I \leq J \in \underline{n}$. Wir schreiben I, J kanonisch in die Form $(I', I''), (J', J'')$ durch den Isomorphismus $\underline{n} \cong \underline{n}' \times \underline{n}''$ und definieren auf $\underline{n} = \{0, 1\}^n \subseteq \{0, 1, 2\}^n$:

$$\begin{aligned} \xi_\pm(I) &:= \xi'_\pm(I') \oplus \xi''_\pm(I'') \\ \xi_\pm(I \rightarrow J) &:= \xi'_\pm(I' \rightarrow J') \oplus \xi''_\pm(I'' \rightarrow J'') \end{aligned}$$

Seien nun $I \leq J \in \{0, 1, 2\}^n$ mit analogen Zerlegungen $I = (I', I'')$, $J = (J', J'')$ wie oben. Wir definieren zusätzlich zu den obigen Vereinbarungen:

$$\begin{aligned} \xi_{\pm}(I) &:= 0 && \text{falls } I' \not\subseteq \{0, 1\}^{n'} \text{ und } I'' \not\subseteq \{0, 1\}^{n''} \\ \xi_{\pm}(I) &:= \xi_{\pm}(I') && \text{falls } I' \not\subseteq \{0, 1\}^{n'} \text{ und } I'' \subseteq \{0, 1\}^{n''} \\ \xi_{\pm}(I) &:= \xi_{\pm}(I'') && \text{falls } I' \subseteq \{0, 1\}^{n'} \text{ und } I'' \not\subseteq \{0, 1\}^{n''} \\ \xi_{\pm}(I \rightarrow J) &:= 0 && \text{falls } I'(\cdot, J') \not\subseteq \{0, 1\}^{n'} \text{ und } I''(\cdot, J'') \not\subseteq \{0, 1\}^{n''} \\ \xi_{\pm}(I \rightarrow J) &:= \xi_{\pm}(I' \rightarrow J') && \text{falls } I'(\cdot, J') \not\subseteq \{0, 1\}^{n'} \text{ und } (I'', \cdot)J'' \subseteq \{0, 1\}^{n''} \\ \xi_{\pm}(I \rightarrow J) &:= \xi_{\pm}(I'' \rightarrow J'') && \text{falls } (I', \cdot)J' \subseteq \{0, 1\}^{n'} \text{ und } I''(\cdot, J'') \not\subseteq \{0, 1\}^{n''} . \end{aligned}$$

Die natürlichen Äquivalenzen η' , η'' induzieren eine natürliche Äquivalenz η , so daß wir ein Element $\xi := (\xi_+, \xi_-; \eta)$ vom Grad n in der KG^{\perp} -Konstruktion bekommen. Wir verwenden dafür auch die Bezeichnung $\xi = \xi' \dot{\oplus} \xi''$. Es gilt dann die **Gleichheit** für drei beliebige Elemente ξ_1, ξ_2, ξ_3 in der KG^{\perp} -Konstruktion:

$$\xi_1 \dot{\oplus} (\xi_2 \dot{\oplus} \xi_3) = (\xi_1 \dot{\oplus} \xi_2) \dot{\oplus} \xi_3 .$$

1.2.2. *K-theoretische Deutung.* Es gilt:

$$\pi.(||\text{KG}^{\perp}\mathcal{C}||) \otimes \mathbb{Q} \cong \text{Prim } H.(||\text{KG}^{\perp}\mathcal{C}||, \mathbb{Q}) \cong \text{Prim } H.(|\mathcal{G}.\mathcal{C}|, \mathbb{Q}) ,$$

wobei die primitiven Elemente bzgl. der bereits diskutierten Komultiplikationen genommen werden. An Stelle von $|\mathcal{G}.\mathcal{C}|$ können wir im affinen Fall die BGL^+ -Konstruktion wählen, falls die Kategorie \mathcal{C} die Kategorie der projektiven oder freien Moduln über einem Ring R ist. (Die Reduktion auf den affinen Fall ist keine Einschränkung im Lichte des JOUANOLOU=Tricks.)

2. Symmetrische Symbole

2.1. Einführung der symmetrischen Symbole.

DEFINITION 2.1. Sei \mathcal{C} eine exakte Kategorie. Ein **symmetrisches Symbol** (oder **symmetrisches Element**) vom Grad k ist ein Element in $\text{KG}_k^{\perp}\mathcal{C}$, welches invariant unter der kanonischen Operation von der symmetrischen Gruppe S_k ist, die von der natürlichen Operation von S_k auf den kartesischen Produktfaktoren von $\{0, 1, 2\}^k$ induziert wird.

Für unsere Zwecke ist es bequem, mit symmetrischen Symbolen zu arbeiten, welche erwählte Quotientendaten besitzen, so daß wir nur die Information entsprechend zu $\{0, 1\}^k \subseteq \{0, 1, 2\}^k$ in Notation erwähnen. Explizit: Sei $\xi \in \text{KG}_k^{\perp}\mathcal{C}$ symmetrisch. Das Ketten-Paar von Monomorphismen in \mathcal{C}

$$\xi(00 \dots 0) \rightarrow \xi(00 \dots 01) \rightarrow \xi(00 \dots 011) \rightarrow \dots \rightarrow \xi(01 \dots 11) \rightarrow \xi(11 \dots 11)$$

sei einfacher bezeichnet mit

$$A_0 \xrightarrow{x_1} A_1 \xrightarrow{x_2} A_2 \xrightarrow{x_3} \dots \xrightarrow{x_{k-1}} A_{k-1} \xrightarrow{x_k} A_k ,$$

wobei $A_j = (A_j^+, A_j^-)$, $x_j = (x_j^+, x_j^-)$ Paare von Objekten resp. Monomorphismen sind. ($0 \leq j \leq k$.)

NOTATION 2.2. Wir schreiben für ein solches Element ξ wie oben alternativ:

$$\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_k \rangle .$$

BEISPIEL 2.3. Sei \mathcal{C} die Kategorie der projektiven Moduln über einem Ring R . Wir setzen $A_j^+ := R^N$ für ein natürliches $N \geq 1$ und $A_j^- := 0$ für alle $0 \leq j \leq k$. So sind $x_j^- = 0$ und $x_j^+ \in GL_N(R)$.

DEFINITION 2.4. Der Komplex $\mathbb{ZK}^{\text{symm}}(\mathcal{C})$ ist der Unterkomplex von $\mathbb{ZK}(\mathcal{C})^{na}$, erzeugt von symmetrischen Elementen.

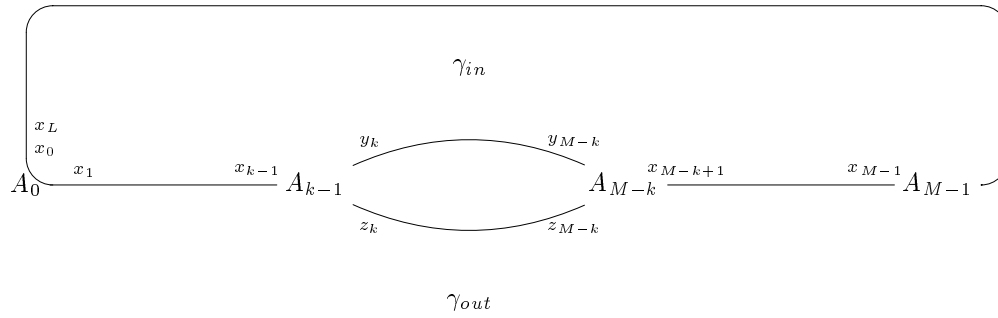
Wir arbeiten also in $\mathbb{ZK}^{\text{symm}}(\mathcal{C})$ modulo ausgearteten Elementen, wobei alle symmetrischen, ausgearteten Elemente total degeneriert sind.

SATZ 2.5. Sei $\langle x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k \rangle$ ein symmetrisches Symbol vom Grad k . Dann gilt in $\mathbb{ZK}^{\text{symm}}(\mathcal{C})$:

$$d\langle x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k \rangle = \begin{cases} \langle x_2, \dots, x_{k-1}, x_k \rangle - \langle x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \rangle & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

□

BEISPIEL 2.9. Wir betrachten nun zwei “zyklische Gleise” γ_{in} und γ_{out} , welche einen gemeinsamen Teil haben:



(Wir haben in diesem Bild nicht mehr jeden Morphismus explizit vermerkt. Stattdessen haben wir z.B. zwischen A_0 und A_{k-1} eine einzige kontinuierliche Linie gezogen, die Morphismen $x_1 : A_0 \rightarrow A_1$, $x_2 : A_1 \rightarrow A_2$, \dots , $x_{k-1} : A_{k-2} \rightarrow A_{k-1}$ haben wir in ihrer Reihenfolge oberhalb dieser Linie vermerkt. Keine Pfeile wurden explizit skizziert.)

In diesem Bild sind

$$\begin{aligned} x_1 : A_0 &\rightarrow A_1 & \dots & & x_{k-1} : A_{k-2} &\rightarrow A_{k-1} , \\ y_k : A_{k-1} &\rightarrow B_k , & y_{k+1} : B_k &\rightarrow B_{k+1} & \dots & & y_{M-k} : B_{M-k-1} &\rightarrow A_{M-k} , \\ z_k : A_{k-1} &\rightarrow C_k , & z_{k+1} : C_k &\rightarrow C_{k+1} & \dots & & z_{M-k} : C_{M-k-1} &\rightarrow A_{M-k} , \\ x_{M-k+1} : A_{M-k} &\rightarrow A_{M-k+1} & \dots & & x_L : A_{L-1} &\rightarrow A_L & \text{und} & & x_0 : A_L &\rightarrow A_0 \end{aligned}$$

alle Isomorphismen in \mathcal{C} .

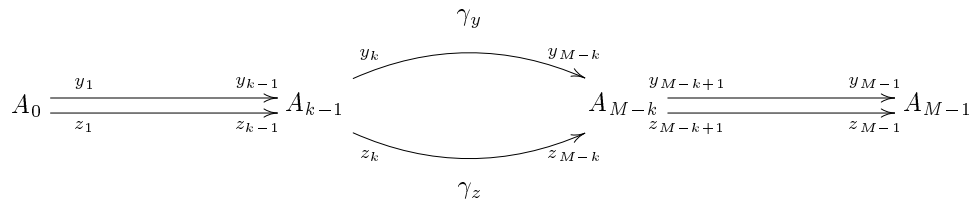
γ_{in} besteht zyklisch aus $x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, \dots, y_{M-k}, x_{M-k+1}, \dots, x_{M-1}, x_M, \dots, x_L, x_0, x_1, \dots$

γ_{out} besteht zyklisch aus $x_1, \dots, x_{k-1}, z_k, \dots, z_{M-k}, x_{M-k+1}, \dots, x_{M-1}, x_M, \dots, x_L, x_0, x_1, \dots$

Die Differenz $Z(\gamma_{in}) - Z(\gamma_{out})$ ist

$$\begin{aligned} &\langle x_1, \dots, x_{k-1}, y_k \rangle + \langle x_2, \dots, x_{k-1}, y_k, y_{k+1} \rangle + \dots + \langle y_{M-k}, x_{M-k+1}, \dots, x_{M-1} \rangle \\ &- \langle x_1, \dots, x_{k-1}, z_k \rangle - \langle x_2, \dots, x_{k-1}, z_k, z_{k+1} \rangle - \dots - \langle z_{M-k}, x_{M-k+1}, \dots, x_{M-1} \rangle . \end{aligned}$$

2.3.2. Zweigleisige Zykel. Wir bemerken, daß die letzte Differenz $Z(\gamma_{in}) - Z(\gamma_{out})$ auch unter der schwächeren Annahme geschrieben werden kann, daß die involvierten Isomorphismen nur Monomorphismen sind. Zu einem Diagramm der Form:



welches die Monomorphismen $y_1 = z_1, \dots, y_{k-1} = z_{k-1}, y_k, z_k, \dots, y_{M-k}, z_{M-k}, y_{M-k+1} = z_{M-k+1}, \dots, y_{M-1} = z_{M-1}$ beinhaltet ($k \leq M - k$), ordnen wir die formale Kombination zu:

$$\begin{aligned} &\langle y_1, \dots, y_{k-1}, y_k \rangle + \langle y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1} \rangle + \dots + \langle y_{M-k}, y_{M-k+1}, \dots, y_{M-1} \rangle \\ &- \langle z_1, \dots, z_{k-1}, z_k \rangle - \langle z_2, \dots, z_{k-1}, z_k, z_{k+1} \rangle - \dots - \langle z_{M-k}, z_{M-k+1}, \dots, z_{M-1} \rangle . \end{aligned}$$

SATZ 2.10. Die obige Kombination ist ein Zykel in $\mathbb{ZK}^{symm}(\mathcal{C})$.

□

BEMERKUNG 2.11. Jeder Zykel der obigen Form kann als lineare Kombination von Zykeln gleicher Form der minimalen Länge $M = 2k$, welche je $2(k-1)+1$ y - bzw. z -Monomorphismen beinhalten, geschrieben werden.

3. Primitivität

BEMERKUNG 3.1. In der Dimension 3 ist jedes Element der Form $\langle a, b, c \rangle$ aus $\mathbb{Z}K_3^{\text{sym}}(\mathcal{C})$ primitiv in der Homologie.

Dies liegt daran, daß die Differenz zwischen $\Delta\langle a, b, c \rangle$ und $\langle \rangle \otimes \langle a, b, c \rangle + \langle a, b, c \rangle \otimes \langle \rangle$ eine lineare Kombination der Terme $\langle a \rangle \otimes \langle b, c \rangle$ und $\langle a, b \rangle \otimes \langle c \rangle$ ist. Für den ersten Term ist $d\langle a \rangle = 0$, und wir können schreiben $\langle b, c \rangle = d\xi$, für ein geeignetes Element ξ vom Grad 3. Es folgt

$$\langle a \rangle \otimes \langle b, c \rangle = \langle a \rangle \otimes d\xi = -d(\langle a \rangle \otimes \xi) .$$

Analog kann auch der zweite Term behandelt werden.

In höheren ungeraden Graden ist eine genauere Untersuchung notwendig: Für ein symmetrisches Symbol 5.ten Grades $\xi := \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle$ gilt:

$$\begin{aligned} \Delta\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle &= \langle \rangle \otimes \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle + \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle \otimes \langle \rangle \\ &\quad + \langle x_1 \rangle \otimes \langle x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle + \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \otimes \langle x_5 \rangle \\ &\quad + 2\langle x_1, x_2 \rangle \otimes \langle x_3, x_4, x_5 \rangle + 2\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \otimes \langle x_4, x_5 \rangle . \end{aligned}$$

Der Koeffizient 2 hat die Bedeutung $2 = \sum_{\sigma \in S(2,3)} (-1)^{|\sigma|} = \sum_{\sigma \in S(3,2)} (-1)^{|\sigma|}$. Für die Primitivität von ξ in der

Homologie bemerken wir, daß die Gleichheit $\Delta\xi \cong \langle \rangle \otimes \xi + \xi \otimes \langle \rangle \pmod{\text{Bild } d}$ genau dann gilt, wenn $2\langle x_1, x_2 \rangle \otimes \langle x_3, x_4, x_5 \rangle + 2\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \otimes \langle x_4, x_5 \rangle$ ein Rand ist.

SATZ 3.2. Sei x ein Automorphismus in der Kategorie \mathcal{C} , und sei 1 die Identität des Definitions- (oder Werte-)Bereiches von x . Dann ist das folgendes Element ein primitiver Zykel:

$$\langle x, 1, \dots, 1 \rangle + \langle 1, x, 1, \dots, 1 \rangle + \dots + \langle 1, 1, \dots, 1, x \rangle .$$

BEWEIS: Dieses Element ist ein "zyklisches Gleis", welches aus den Morphismen $x, 1, 1, \dots, 1$ besteht, also ein Zykel.

Die Primitivität folgt aus der Bemerkung, daß jedes Element der Form $\langle 1, 1, \dots, 1, x, 1, \dots, 1, 1 \rangle$ primitiv ist, da in $\Delta\langle 1, 1, \dots, 1, x, 1, \dots, 1, 1 \rangle$ alle Tensorfaktoren der Form $\langle 1, 1, \dots, 1 \rangle \otimes ?$ oder $? \otimes \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$ verschwinden: $\langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$ ist total ausgeartet.

□

Insbesondere können wir die Elemente:

$$(56) \quad \langle x, 1, 1 \rangle + \langle 1, x, 1 \rangle + \langle 1, 1, x \rangle$$

$$(57) \quad \langle x, 1, 1, 1, 1 \rangle + \langle 1, x, 1, 1, 1 \rangle + \langle 1, 1, x, 1, 1 \rangle + \langle 1, 1, 1, x, 1 \rangle + \langle 1, 1, 1, 1, x \rangle$$

...

als Elemente in der (rationalen) K-Theorie der Kategorie \mathcal{C} in Graden 3, 5, ... ansehen.

Teil 2

Regulatoren

Superalgebra

1. Superlineare Algebra

Wir werden in diesem Abschnitt für unsere Zwecke die superlineare Algebra beschreiben und gleichzeitig die Notation dadurch fixieren. Eine algebraische Referenz dafür ist z.B. die Monographie [Ma]. Die für differentialgeometrische Zwecke benutzte superlineare Algebra findet in [BGV] eine klare Darstellung. Wichtige Begriffe sind die Superspur, die Ableitungsformel und die Verschwindung der Superspur auf Superkommutatoren.

Die Vorsilbe "Super"¹ wird des weiteren semantisch den Unterschied zwischen einer mathematischen Struktur und der assoziierten Superstruktur hervorheben. Starten wir mit einer Kategorie \mathcal{C} , so werden wir versuchen, eine Unterkategorie der Kategorie der $\mathbb{Z}/2$ -graduerten Objekten dieser Kategorie, $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}/2}$, auszuzeichnen. Diese Konstruktion bringt erst dann neue strukturelle qualitative Eigenschaften mit sich, wenn die zwei Kopien der Startkategorie wechselwirken.

Wir werden zuerst mit der Kategorie der Moduln über einem Ring k an, und führen dabei parallele funktorielle Konstruktionen in den zwei Kopien durch. Dabei benutzen wir nur die additive Struktur der Indexmenge $\mathbb{Z}/2$.

DEFINITION 1.1. *Sei k ein festgelegter Ring. Die Kategorie $(\$-Mod/k)$ der k -Supermoduln hat:*

- *Objekte: $\mathbb{Z}/2$ -graduierte k -Moduln. Ein $\$$ -Modul E ist insbesondere mit einer Zerlegung*

$$E = E^0 \oplus E^1$$

(in der Kategorie der k -Moduln) als Teil der Struktur versehen.

- *Morphismen: Morphismen in der Kategorie der k -Moduln. Ein Morphismus, der die Graduierung respektiert, heißt homogen.*

Jeder Morphismus f läßt sich eindeutig als Summe von homogenen Morphismen schreiben: $f = f^0 + f^1$.

Wir werden des weiteren die Abhängigkeit von k nur im Zweifelsfall unterstreichen.

Die direkte Summe (notiert \oplus), Kern und Kokern von Morphismen sind kanonisch $\mathbb{Z}/2$ -graduiert. Die $\$$ -Moduln bilden eine abelsche Kategorie. Die abelsche Kategorie der Moduln ist eine volle Unterkategorie vermöge des Funktors, der einen Modul E mit der trivialen Graduierung $E = E \oplus 0$ versieht.

Das $\$$ -Tensorprodukt von zwei $\$$ -Moduln E und F ist das übliche Tensorprodukt mit der $\mathbb{Z}/2$ -Graduierung:

$$\begin{aligned}(E \otimes F)^0 &= (E^0 \otimes F^0) \oplus (E^1 \otimes F^1) \\ (E \otimes F)^1 &= (E^1 \otimes F^0) \oplus (E^0 \otimes F^1)\end{aligned}$$

Das Tensorprodukt von Objekten der Kategorie $(\$-Mod)$ ist dadurch definiert. Wir können es zu einem Funktor erweitern:

$$\otimes : (\$-Mod) \times (\$-Mod) \longrightarrow (\$-Mod) ,$$

indem wir das Tensorprodukt $f_1 \otimes f_2$ von zwei homogenen Morphismen $f_i \in Hom(E_i, F_i)$ für $i = 1, 2$ von Graden $|f_i|$ erklären:

$$(f_1 \otimes f_2)(a_1 \otimes a_2) := (-1)^{|f_2||a_1|} f_1(a_1) \otimes f_2(a_2) , \quad a_i \in E_i \text{ homogen vom Grad } |a_i| ,$$

und anschließend linearisieren. Dann ist $((\$-Mod), \otimes)$ eine Tensorkategorie.

DEFINITION 1.2. *Die Kategorie der Superalgebren $(\$-Alg/k)$ hat:*

- *Objekte: $\mathbb{Z}/2$ -graduierte Algebren A : Es gilt: $A^i + A^i \subseteq A^i$ und $A^i \cdot A^j \subseteq A^{i+j}$ für $i, j \in \mathbb{Z}/2$.*
- *Morphismen: Morphismen in der Kategorie der k -Algebren, die homogen sind.*

¹Das Symbol "\$" steht ab sofort innerhalb eines Satzes für die Vorsilbe "super". Innerhalb einer mathematischen Formel bezeichnet es den Anfang bzw. das Ende eines Ausdrucks, von dem die noch einzuführende Superspur genommen wird. Keine mathematische Verwechslungsgefahr liegt vor.

DEFINITION 1.3. Für jede Superalgebra kann ein Superkommutator eingeführt werden. Der $\$$ -Kommutator $[a, b]$ ist definiert als (k -bilineare Fortsetzung der Vorschrift)

$$(58) \quad [a, b] := ab - (-1)^{|a||b|}ba$$

für homogene Elemente a, b vom Grad $|a|$ bzw. $|b|$. Eine $\$$ -Algebra heißt $\$$ -kommutativ, falls alle $\$$ -Kommutatoren verschwinden.

SATZ 1.4. Sei A eine $\$$ -Algebra. Der Kommutator $[\cdot, \cdot]$ hat die Eigenschaften:

$$(59) \quad [a, b] = -(-1)^{|a||b|}[b, a] ,$$

$$(60) \quad 0 = (-1)^{|a||c|}[a, [b, c]] + (-1)^{|b||a|}[b, [c, a]] + (-1)^{|c||b|}[c, [a, b]] ,$$

$$(61) \quad [d, ab] = [d, a]b + (-1)^{|d||a|}a[d, b] ,$$

für die homogenen Elemente a, b und d aus A .

Die Relation (60) ist das superalgebraische Analogon der Jacobi-Gleichung, und (61) entspricht der Poisson-Gleichung. Die Übersetzung der $\$$ -POISSON-Gleichung (61) ist, daß die Abbildung: $[d, -]$ für d vom Grad 1 zu einer $\$$ -Derivation wird: Notieren wir $d(a) := [d, a]$, so gilt für homogenes a

$$d(ab) = d(a)b + (-1)^{|a|}ad(b) , \quad \text{für } a, b \in A .$$

BEISPIEL 1.5. Sei k kommutativ, und sei E ein Supermodul, so daß die Anteile E^0 und E^1 frei und vom endlichen Rang sind. Die Endomorphismen von E , $\text{End}(E)$, werden mit 2×2 Matrizen bezüglich der kanonischen Zerlegung von E identifiziert. $\text{End}(E)$ trägt eine kanonische $\mathbb{Z}/2$ -Graduierung gegeben durch

$$\text{End}(E)^0 := \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

und

$$\text{End}(E)^1 := \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} .$$

$\text{End}(E)^\epsilon$ besteht genau aus den homogenen Endomorphismen von E vom Grad ϵ .

Dann ist $\text{End}(E)$ eine (im allgemeinen nicht superkommutative) Superalgebra. Ein wichtiger Begriff in diesem Fall wird nun definiert:

DEFINITION 1.6. Die Superspur $\$ \cdot \$: \text{End}(E) \rightarrow k$ ist die k -lineare Abbildung:

$$\$ \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \$:= \text{Spur}(a_{00}) - \text{Spur}(a_{11})$$

Die Superspur ist ein homogener Morphismus $\$ \cdot \$: \text{End}(E)^1 \rightarrow k$ in der Kategorie der Supermoduln. Sie verschwindet auf $\$$ -Kommutatoren.

Wir benutzen nun die zusätzliche $\mathbb{Z}/2$ -Graduierung und den nichttrivialen Kozykel

$$(\mathbb{Z}/2)^{\times 2} \ni (m, n) \longrightarrow (-1)^{mn} \in \mathbb{Z}^\times$$

für die Einführung einer Tensorproduktstruktur für Superalgebren:

DEFINITION 1.7. Eine $\$$ -Algebra A hat eine kanonische unterliegende $\$$ -Modul-Struktur $A^!$: Dieser Übergang ist von dem Vergiß-Funktor $A \rightarrow A^!$ gegeben. Das $\$$ -Tensorprodukt von $\$$ -Algebren ist so definiert, daß dieser Vergiß-Funktor ein Tensorfunktorkomplex ist: $(A \otimes B)^! := A^! \otimes B^!$. Auf dem Supermodul $(A \otimes B)^!$ ist folgende Multiplikation erklärt:

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) := (-1)^{|b_1||a_2|} a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 ,$$

wobei $a_i \in A$ und $b_i \in B$ homogene Elemente sind, und wir benutzen für beliebige Elemente die k -Linearisierung. Es entsteht ein Objekt $A \otimes B$ in der Kategorie der Superalgebren.

Dadurch haben wir eine Vorschrift \otimes auf $\$$ -Algebren objektweise definiert. Sind f und g Morphismen in der Kategorie der $\$$ -Algebren, so ist $(f^!) \otimes (g^!)$ wohldefiniert, homogen und verträglich mit der Multiplikation, liegt also im Bilde des Vergiß-Funktors. Es gibt einen eindeutigen Morphismus von $\$$ -Algebren, den wir mit $f \otimes g$ bezeichnen, so daß gilt: $(f \otimes g)^! = (f^!) \otimes (g^!)$. Dadurch wird die Kategorie der $\$$ -Algebren zu einer Tensorkategorie. Der Vergiß-Funktor ist ein Tensorfunktorkomplex. Wir werden künftig diesen Funktor implizit benutzen, ohne es durch die Notation zu betonen.

Das $\$$ -Tensorprodukt von $\$$ -kommutativen $\$$ -Algebren ist $\$$ -kommutativ wegen

LEMMA 1.8. Seien A, B $\$$ -Algebren. Für A $\$$ -kommutativ gilt in $A \otimes B$:

$$[a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2] = (-1)^{|b_1||a_2|} a_1 a_2 \otimes [b_1, b_2]$$

□

KOROLLAR 1.9. A sei $\$$ -kommutativ. Die Erweiterung der $\$$ -Spur:

$$\begin{aligned} A \otimes \text{End}(E) &\xrightarrow{\$ \cdot \$} A \\ \$ a \otimes A \$ &:= a \$ A \$ \end{aligned}$$

verschwindet auf $\$$ -Kommutatoren.

BEWEIS:

$$\begin{aligned} \$ [a_1 \otimes A_1, a_2 \otimes A_2] \$ &= \$ \pm a_1 a_2 \otimes [A_1, A_2]_s \$ \\ &= \pm a_1 a_2 \$ [A_1, A_2] \$ \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

2. Allgemeiner Grundring

Wir werden in diesem Abschnitt die Superspur im allgemeinen Fall eines superkommutativen Superringes einführen. Sei nun A eine Superalgebra, wodurch wir den Fall des trivial graduierten Grundringes k verallgemeinern. Wir bezeichnen durch $A^!$ die unterliegende Ringstruktur.

Ein A -Supermodul ist ein $A^!$ -Supermodul, für den die Multiplikation mit Skalaren homogen vom Grad Null ist.

Sei E ein A - $\$$ -Modul. Die Graduierung erfolgt durch die Gruppe $(\mathbb{Z}/2 = \{0, 1\}, +)$. Wir können den $\$$ -Modul $E^{opp} = E[1]$ mit der umgekehrten Graduierung bilden: $(E^{opp})^\bullet = E^{\bullet+1}$.

Betrachten wir A als $\$$ -Modul über sich selbst, so ist A^{opp} der $\$$ -Modul mit der umgekehrten Graduierung.

DEFINITION 2.1. Ein freier A -Supermodul ist eine direkte Summe von $\$$ -Moduln, die zu A oder A^{opp} isomorph sind.

DEFINITION 2.2. Ein projektiver A -Supermodul E ist ein direkter Summand von einem freien $\$$ -Modul **Frei**.

Das heißt, es gibt homogene Morphismen vom Grad Null $i, j; p, q$, so daß:

$$\begin{aligned} pi &= id_E & qi &= 0 \\ qj &= id_{Rest} & pj &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Rest} & & \\ & & \downarrow j & & \\ E & \xrightarrow{i} & \text{Frei} & \xrightarrow{q} & \text{Rest} \\ & & \downarrow p & & \\ & & E & & \end{array}$$

Sei $E = \left[\begin{smallmatrix} (A)^{n_0} \\ \oplus \\ (A^{opp})^{n_1} \end{smallmatrix} \right]$ ein freier A - $\$$ -Modul. Jeder Endomorphismus von E hat bezüglich dieser Zerlegung die Form:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} : \begin{smallmatrix} (A)^{n_0} \\ \oplus \\ (A^{opp})^{n_1} \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} (A)^{n_0} \\ \oplus \\ (A^{opp})^{n_1} \end{smallmatrix}$$

$a_{ij} : A^{n_j} \rightarrow A^{n_i}$ ist dabei eine $(n_i \times n_j)$ -Matrix mit Koeffizienten in A . Wir definieren die Superspur dieses Endomorphismus von einem freien $\$$ -Modul nach [Ma], Kapitel 3, §3.3 durch:

$$\$ \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \$:= \text{Spur}(a_{00}) - (-1)^{|a_{11}|} \text{Spur}(a_{11}) \in A.$$

oder für $a = a_{ij}$ einen homogenen Eintrag in einer solchen Matrix:

$$\$ a_{ij} \$ = \delta_{ij} (-1)^{|i|(|a|+1)} \text{Spur}(a)$$

SATZ 2.3. Ist A eine $\$$ -kommutative Algebra, so verschwindet die Superspur auf $\$$ -Kommutatoren von Endomorphismen eines freien A - $\$$ -Moduls.

BEWEIS: Seien $a = a_{ij}$ und $b = b_{kl}$ homogen. Dann ist:

$$\begin{aligned} [a, b] &= a_{ij} b_{kl} - (-1)^{(|i|+|j|+|a|)(|i|+|j|+|b|)} b_{kl} a_{ij} \\ \text{dieser Ausdruck ist Null, es sei denn } i &= l \text{ und } j = k, \text{ wenn er weiter gleicht:} \\ &= (-1)^{|i|(|a|+|b|+1)} \text{Spur}(ab) - (-1)^{(|i|+|j|+|a|)(|i|+|j|+|b|)} (-1)^{|j|(|a|+|b|+1)} \text{Spur}(ba) \\ &= \pm \left\{ \text{Spur}(ab) - (-1)^{|a||b|} \text{Spur}(ba) \right\}, \end{aligned}$$

wobei $\pm = (-1)^{|i|(|a|+|b|+1)}$. Der letzte Ausdruck verschwindet wegen der $\$$ -Kommutativität von A . \square

DEFINITION 2.4. Sei A ein superkommutativer Superring. Sei E ein projektiver Supermodul über A . Sei $\xi : E \rightarrow E$ ein Endomorphismus. Wir sehen E als eingebettet in einem freien Supermodul **Frei** wie im Satz 2.2 und definieren

$$(62) \quad \$ \xi \$:= \$ i \xi p \$$$

durch Reduktion auf den freien Fall.

SATZ 2.5. Die Superspür ist durch (62) wohldefiniert.

BEWEIS: Seien

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_1} & \mathbf{Frei}_1 \\ & \searrow & \downarrow p_1 \\ & & E \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_2} & \mathbf{Frei}_2 \\ & \searrow & \downarrow p_2 \\ & & E \end{array}$$

zwei Einbettungen von E in zwei freie Supermoduln **Frei**₁ und **Frei**₂. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{Frei}_1 & \xrightarrow{i_1 \xi p_1} & \mathbf{Frei}_1 \\ & & \downarrow p_1 & & \uparrow i_1 \\ & & E & \xrightarrow{\xi} & E \\ & \swarrow i_2 & \parallel & \searrow p_2 & \\ & & E & \xrightarrow{\xi} & E \\ & \swarrow p_2 & \parallel & \searrow i_2 & \\ & & \mathbf{Frei}_2 & \xrightarrow{i_2 \xi p_2} & \mathbf{Frei}_2 \end{array}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \$ i_1 \xi p_1 \$ &= \$ i_1 p_2 \ i_2 \xi p_2 i_2 p_1 \$ = \$ i_2 \xi p_2 i_2 p_1 \ i_1 p_2 \$ = \$ i_2 \xi p_2 i_2 p_2 \$ \\ &= \$ i_2 \xi p_2 \$. \end{aligned}$$

\square

Als Korollar erhalten wir die Verschwindung von Superkommutatoren eines projektiven Supermoduls: Sind ξ und η zwei solche homogenen Morphismen, so gilt mit der naheliegenden Notation:

$$\begin{aligned} \$ [\xi, \eta] \$ &:= \$ i [\xi, \eta] p \$ = \$ i (\xi \eta - (-1)^{|\xi||\eta|} \eta \xi) p \$ \\ &= \$ i \xi p \ i \eta p - (-1)^{|i \xi p| |i \eta p|} i \eta p \ i \xi p \$ = 0 . \end{aligned}$$

Wir haben dabei nicht benutzt, daß i und p Grad Null haben.

3. Differentialgeometrische Superobjekte

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Ein $\$$ -Bündel auf X entsteht nach Vergabung lokaler trivialer Bündeln, derer Faser $\$$ -Struktur über dem komplexen Körper besitzt. Ein $\$$ -Bündel E besitzt die Zerlegung $E = E^0 \oplus E^1$ als Teil der Struktur. Die Garbe der glatten (C^∞) Differentialformen — in Notation A_X oder A , wenn unmißverständlich, — ist kanonisch \mathbb{Z} -also auch $\mathbb{Z}/2$ -graduiert, und ihre Multiplikation $\$$ -kommutativ. Die Ableitung

$$d : A_X \rightarrow A_X \in \text{End}(A_X)^1$$

ist eine Superderivation:

$$d(\eta_1 \cdot \eta_2) = d\eta_1 \cdot \eta_2 + (-1)^{|\eta_1|} \eta_1 \cdot d\eta_2$$

Wir werden für ein komplexes Vektorbündel E die lokalfreie Garbe der C^∞ -Schnitte dieses Bündels unterschiedlich bezeichnen, und benutzen dafür den gleichen Buchstaben in der kalligraphischen Font, in diesem Fall \mathcal{E} . Wir können allgemeiner kovariante $\$$ -Ableitungen auf dem A_X -Supermodul $A_X(\mathcal{E}) := A_X \otimes \mathcal{E}$, wobei das Tensorprodukt über A_X^0 genommen ist. Diese haben $\mathbb{Z}/2$ -Grad gleich 1.

BEMERKUNG 3.1. \mathcal{E} ist ein projektiver A_X^0 -Supermodul. $A_X(\mathcal{E})$ ist ein projektiver A_X -Supermodul.

DEFINITION 3.2. Ein Superzusammenhang ∇ auf einem Superbündel E ist

- ein ungerader: $\nabla \in \text{End}_{\mathbb{C}}(A_X(\mathcal{E}))^1$,
- derivativer: $\nabla(\eta \cdot \xi) = d\eta \cdot \xi + (-1)^{|\eta|} \eta \nabla \xi$

(\mathbb{C} -linearer) Endomorphismus.

Zwei $\$$ -Zusammenhänge ∇_1 und ∇_2 unterscheiden sich um einen A_X -Endomorphismus von $A_X(\mathcal{E})$:

$$\begin{aligned} \nabla_1 - \nabla_2 &\in \text{Hom}_{A_X}(A_X(\mathcal{E}), A_X(\mathcal{E}))^1 \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}, A_X(\mathcal{E}))^1 \\ &= A_X(\text{End}(\mathcal{E}))^1 \\ &= A_X^0(\text{End}(\mathcal{E})^1) \oplus A_X^1(\text{End}(\mathcal{E})^0) \end{aligned}$$

DEFINITION 3.3. Die Superkrümmung ist der A_X -lineare Morphismus:

$$\nabla^2 \in \text{Hom}_{A_X}(A_X(\mathcal{E}), A_X(\mathcal{E}))^0$$

Die A_X -Linearität folgt nach dem bekannten Muster:

$$\begin{aligned} \nabla^2(\eta \cdot \xi) &= \nabla(d\eta \cdot \xi) + (-1)^{|\eta|} \eta \cdot \nabla^2 \xi \\ &= dd\eta \cdot \xi + (-1)^{|d\eta|} d\eta \cdot \nabla \xi + (-1)^{|\eta|} d\eta \cdot \nabla \xi + (-1)^{|\eta|} (-1)^{|\eta|} \eta \cdot \nabla^2 \xi \\ &= \eta \cdot \nabla^2 \xi \end{aligned}$$

Folgendes Resultat wird stillschweigend sehr oft benutzt:

LEMMA 3.4 (Die Ableitungsformel). Seien ∇ $\$$ -Zusammenhang und $\xi \in A_X(\text{End}(\mathcal{E}))$ ein (lokaler oder globaler) glatter Schnitt. Dann gilt:

$$(63) \quad d \$ \xi \$ = \$ [\nabla, \xi] \$$$

(In $[\nabla, \xi]$ ist ξ als Differentialoperator vom Grad Null zu verstehen, welcher gleich der Linksmultiplikation mit ξ ist.)

BEWEIS: Für diese lokale Aussage können wir E trivial annehmen. Ein Endomorphismus ξ ist nun eine quadratische Matrix mit Einträgen aus A_X . Hier haben wir einen ausgezeichneten $\$$ -Zusammenhang, bezeichnet auch mit d , der jeden Eintrag in A_X ableitet.

Es gibt einen Endomorphismus η mit $\nabla = d + \eta$.

$$\$ [\nabla, \xi] \$ = \$ [d, \xi] \$ + \$ [\eta, \xi] \$ = \$ (d\xi_{ij})_{ij} \$ + 0 = d \$ \xi \$$$

□

Dieses Resultat hat die folgende Verallgemeinerung:

BEMERKUNG 3.5. Sei $(A, +, \cdot, d)$ eine $\$$ -kommutative Differentialalgebra. Die $\$$ -Derivation ist vom Grad 1 und hat die Eigenschaft:

$$d : A \longrightarrow A, \quad d(ab) = b \cdot da + (-1)^{|a|} a \cdot db, \quad \text{für } a, b \in A.$$

Sei E_1 ein projektiver A -Modul versehen mit einer d -derivativen Abbildung $\nabla_1 : E_1 \rightarrow E_1$, i.e.

$$\nabla_1(a \cdot e_1) = da \cdot e_1 + (-1)^{|\xi|} a \cdot \nabla_1 e_1 \quad a \in A, \quad e_1 \in E_1,$$

die additiv und vom Grad Eins ist.

Jede Einbettung von E_1 in einen freien A -Modul $\mathbf{Frei} = E_1 \oplus E_2$ liefert eine von dieser Einbettung unabhängige $\$$ -Spur, $\$ \cdot \$$, auf den A -Endomorphismen von E_1 .

In diesem Kontext gilt

$$\$ [\nabla_1, \xi_1] \$ = d \$ \xi_1 \$$$

für jeden A -superlinearen Morphismus $\xi_1 : E_1 \rightarrow E_1$.

BEWEIS: In dem freien Fall ist der Beweis wie im obigen Lemma. Der projektive Fall wird durch Reduktion auf den freien Fall bewiesen. Auf **Frei** gibt es einen kanonischen d-derivativen Operator, ∇ . Durch die Vorschrift $\nabla_2 := p_2 \nabla i_2$ erhalten wir einen d-derivativen Operator auf E_2 . Dann ist

$$i_1 \nabla_1 p_1 + i_2 \nabla_2 p_2$$

ein neuer d-derivativer Operator auf **Frei**. Sei ξ_1 ein Endomorphismus von E_1 . Es gilt:

$$\begin{aligned} d \$ \xi_1 \$ &:= d \$ i_1 \xi_1 p_1 \$ \\ &= \$ [i_1 \nabla_1 p_1 + i_2 \nabla_2 p_2, i_1 \xi_1 p_1] \$ \\ &= \$ [i_1 \nabla_1 p_1, i_1 \xi_1 p_1] \$ \\ &= \$ i_1 [\nabla_1, \xi_1] p_1 \$ \\ &=: \$ [\nabla_1, \xi_1] \$ \end{aligned}$$

□

4. Metrisierte Multikomplexe von holomorphen Bündeln

X ist eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Die Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ erlaubt jedes \mathbb{Z} -graduierte Objekt als $\mathbb{Z}/2$ -graduiertes Objekt zu betrachten. Sei

$$E^{\bullet[1]} : \quad \dots \longrightarrow E^n \xrightarrow{\mathbf{v}^n} E^{n+1} \xrightarrow{\mathbf{v}^{n+1}} E^{n+2} \longrightarrow \dots$$

ein holomorphes Differentialbündel. (Eine kurze Bemerkung zur Notation: Das Exponent 1 deutet auf die einzige Richtung der Differentialabbildung des Komplexes. Später steht allgemeiner $E^{\bullet[n]}$ für einen Multikomplex mit n Richtungen, i.e. er ist \mathbb{Z}^n -graduiert, und das Differential $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ hat die Komponente \mathbf{v}_i vom Grad $(0, 0, \dots, 0, 1 \text{ an der } i\text{-ten Stelle}, 0, \dots, 0)$. Ohne Verwechslungsgefahr wird \mathbf{v} immer für das gemischte Differential $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n$ stehen.) \mathbf{v} ist die holomorphe Differentialabbildung vom Grad 1 unter der kanonischen Graduierung. Metriken auf diesem Bündel werden mit h, k , etc. bezeichnet.

Die holomorphe Struktur auf E drückt die Existenz des $\bar{\partial}$ -Operators ($\bar{\partial}^2 = 0$) auf $A_X(E)$ aus.

Auf $A_X(E)$ werden wir mit der folgenden festgelegten \mathbb{Z} -Graduierung arbeiten:

$$(64) \quad \deg A_X^{pq}(E^n) := -p + q + n$$

Sei ∂_h der einzige ∂ -Operator (i.e. ∂_h ist ∂ -derivativ), der $\bar{\partial}$ zu einem metrischen Zusammenhang $\nabla = \partial_h + \bar{\partial}$ vervollständigt. Die Verträglichkeit mit der Metrik h :

$$(\nabla e, f)_h + (e, \nabla f)_h = d(e, f)_h$$

läßt sich sofort übersetzen in

$$(\partial_h e, f)_h = \partial(e, f)_h - (e, \bar{\partial} f)_h.$$

(Die Metrik h von E induziert die offensichtliche A_X -bilineare Abbildung von $A_X(E)$, die wir weiter mit h bezeichnen.)

\mathbf{v}_h^* , der (im formalen Sinne) adjungierte Operator zu \mathbf{v} , ist eindeutig bestimmt durch

$$(\mathbf{v}_h^* e, f)_h = (e, \mathbf{v} f)_h.$$

Sei (E, \mathbf{v}) ein holomorphes eindimensionales Komplexbündel. Die holomorphe Struktur ist äquivalent in dem Operator $\bar{\partial}$, mit $\bar{\partial}^2 = 0$, kodiert. Er operiert auf glatten Schnitten. Das (eventuell nicht exakte) holomorphe Differential \mathbf{v} des Komplexes kann benutzt werden, um diese holomorphe Struktur zu deformieren: Der Operator $\nabla'' := \bar{\partial} + \mathbf{v}$ hat auch die Eigenschaft $\nabla''^2 = \bar{\partial}^2 + [\bar{\partial}, \mathbf{v}] + \mathbf{v}^2 = 0$ und prägt eine neue holomorphe Struktur auf E ein.

Sei nun ∇_h der HERMITESCHE metrische Zusammenhang eines holomorphen Differentialbündels (E, \mathbf{v}) zur deformierten holomorphen Struktur gegeben von ∇'' . Wir können dann die Anteile bezüglich der \mathbb{Z} -Graduierung (64) gruppieren:

$$(65) \quad \nabla_h := \underbrace{\bar{\partial} + \mathbf{v}}_{\nabla''} + \underbrace{\partial_h + \mathbf{v}_h^*}_{\nabla'},$$

wobei $\deg \bar{\partial} = \deg \nabla'' = +1$ und $\deg \mathbf{v}_h^* = \deg \partial_h = \deg \nabla' = -1$.

Eine Deformation der Metrik induziert eine Änderung nur in dem ∂ -derivativen Anteil ∇' . Die Berechnungen der nächsten Abschnitten, die im Rahmen der Differentialgeometrie von Vektorbündeln algebrogeometrische Eigenschaften übersetzen, basieren zum Teil auf folgender Überlegung:

Der ∇ -Zusammenhang ∇_h ist im allgemeinen nicht flach. Dessen Teile ∇'' und ∇' sind aber "flach":

$$(66) \quad \nabla''^2 = \nabla'^2 = 0$$

Dies folgt für ∇'' aus der Holomorphie von \mathbf{v} und weiter für ∇' durch die definierende Adjunktion. In diesem Sinne können wir diesen Punkt als Anfang der Entwicklung einer nichtkommutativen (algebraischen) Geometrie ansehen, wobei

- die (differential)geometrische Struktur eines Bündels mit einem (nicht)flachen Zusammenhang,
- in den rein algebraischen Aspekt der (Nicht-)Kommutativität von zwei Differentialoperatoren (geometrischer Natur)

übersetzt wird. Wir werden die Relation (66) in folgender Form benutzen: Die Differentialoperatoren $\nabla = \nabla'' + \nabla'$ und $\nabla^c = \nabla'' - \nabla'$ superkommutieren:

$$[\nabla, \nabla^c] = [\nabla'' + \nabla', \nabla'' - \nabla'] = [\nabla'', \nabla''] - [\nabla', \nabla'] = 2\nabla''^2 - 2\nabla'^2 = 0.$$

Widmen möchten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf folgende

FRAGE 4.1. *Wie ändert sich der Superzusammenhang ∇_h bei einer Änderung der Metrik h ?*

Unter der Notation $k = hH$ verstehen wir des weiteren die Relation $(e, f)_k = (He, f)_h$. (Sie entspricht der üblichen Transformation von Bilinearformen.) Diese Notation ist sinnvoll:

$$l = kK, k = hH \Rightarrow (e, f)_l = (Ke, f)_k = (HKe, f)_h$$

also $l = HKh$, als würden wir einsetzen: $l = kK = (hH)K$. Der Operator H ist selbstadjungiert bezüglich h und k , da

$$(He, f)_h = (e, f)_k = \overline{(f, e)_k} = \overline{(Hf, e)_h} = (e, Hf)_h$$

und

$$(He, f)_k = (H^2e, f)_h = (He, Hf)_h = (e, Hf)_k$$

Seien h, k zwei Metriken verbunden durch $k = hH$. Dann

$$\begin{aligned} (\partial_k e, f)_k &= \partial(e, f)_k - (e, \bar{\partial}f)_k \\ &= \partial(He, f)_h - (He, \bar{\partial}f)_h \\ &= (\partial_H He, f)_h \\ &= ([\partial_h, H] + H\partial_h)e, f)_h \\ &= (H^{-1}([\partial_h, H] + H\partial_h)e, f)_k \end{aligned}$$

also

$$(67) \quad \partial_k = \partial_h + H^{-1}[\partial_h, H]$$

und

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_k^* e, f)_k &= (e, \mathbf{v}f)_k \\ &= (He, \mathbf{v}f)_h \\ &= (\mathbf{v}_h^* He, f)_h \\ &= ([\mathbf{v}_h^*, H] + H\mathbf{v}_h^*)e, f)_h \\ &= (H^{-1}([\mathbf{v}_h^*, H] + H\mathbf{v}_h^*)e, f)_k \end{aligned}$$

also

$$(68) \quad \mathbf{v}_k^* = \mathbf{v}_h^* + H^{-1}[\mathbf{v}_h^*, H]$$

Aus (67) und (68) folgen:

$$(69) \quad \nabla'_k = \nabla'_h + H^{-1}[\nabla'_h, H]$$

$$(70) \quad \nabla_k = \nabla_h + H^{-1}[\nabla'_h, H]$$

Regulatoren

1. Höhere CHERN Charaktere. Klassische Sichtweise

Zuerst wird der etablierte Formalismus der höheren CHERN Charaktere von der K-Theorie in eine Kohomologietheorie skizziert ([Be]; [Hu], S.99; [Sch], §4). Im nächsten Abschnitt betrachten wir einen Teil dieser Abbildungen, der nicht nur kohomologisch, sondern auch zum Niveau der Komplexe existiert.

Sei \mathcal{V} eine Kategorie von Schemata und Y ein Objekt in \mathcal{V} .

$\text{Hom}_{\mathcal{V}}(\cdot, Y)$ wird zu einer Prägarbe von Mengen auf \mathcal{V} .

Sei $\underline{\mathbb{Z}}Y$ die Vergarbung der Prägarbe von \mathbb{Z} -Moduln $\mathbb{Z}[\text{Hom}_{\mathcal{V}}(\cdot, Y)]$. Wegen der Funktorialität kann $\underline{\mathbb{Z}}Y_{\bullet}$ auch für simpliziale Objekte Y_{\bullet} in \mathcal{V} eingeführt werden.

Sei nun \mathcal{F} eine Garbe auf \mathcal{V} . Es gilt:

$$(71) \quad H^{\bullet}(Y_{\bullet}, \mathcal{F}) = \text{End}_{\mathcal{V}}^{\bullet}(\underline{\mathbb{Z}}Y_{\bullet}, \mathcal{F})$$

Durch die Dold–Puppe–Konstruktion ergibt die Garbe $\underline{\mathbb{Z}}Y_{\bullet}$ einen in *negativen* Graden getragenen Komplex von Garben:

$$(72) \quad N\underline{\mathbb{Z}}Y_{\bullet}: \quad \dots \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}Y_{-k} \xrightarrow{\sum (-1)^i \partial_i} \underline{\mathbb{Z}}Y_{-k+1} \longrightarrow \dots$$

Arbeiten wir in der Derivierten Kategorie $D(\mathcal{V})$, so entspricht dem Grad \bullet aus End^{\bullet} in (71) folgende *positive* Verschiebung von \mathcal{F} bei der Berechnung der Kohomologie:

$$(73) \quad H^*(Y_{\bullet}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{D(\mathcal{V})}(N\underline{\mathbb{Z}}Y_{\bullet}, \mathcal{F}[*]).$$

Für K-theoretische Zwecke setzen wir $Y_{\bullet} := B_{\bullet}GL$ ein, und \mathcal{F} sei eine Garbe von Komplexen, die zu einer getwisteten Poincaré–Dualität–Theorie gehört. Die universellen CHERN–Klassen

$$(74) \quad c_p \in H^{2p}(B_{\bullet}GL, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_{D(\mathcal{V})}(N\underline{\mathbb{Z}}B_{\bullet}GL, \mathcal{F}[2p])$$

bestimmen Morphismen $c_p : N\underline{\mathbb{Z}}B_{\bullet}GL \rightarrow \mathcal{F}[2p]$ in der derivierten Kategorie, die wesentlich in der Definition folgender Abbildung vorkommen:

$$(75) \quad c_{k,p} : K_k(A) = \pi_k(BGL(A)^+) \xrightarrow{\text{Hurewicz}} H_k(BGL(A)^+, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(GL(A), \mathbb{Z}) \xrightarrow{H^{-k}(c_{p,A})} H^{-k}(N\underline{\mathbb{Z}}BGL(A)) \xrightarrow{H^{-k}(c_{p,A})} H^{-k}(A, \mathcal{F}[2p]) = H^{2p-k}(A, \mathcal{F})$$

Dadurch sind die höheren CHERN–Klassen zuerst für affine Schemata $\text{Spec } A$ definiert. Simpliziale Standardtechniken oder der JOUANALOU–Trick erweitern diese Konstruktion zu beliebigen Schemata.

2. Höhere CHERN Charaktere. Alternative Sichtweise

Wir übertragen die obige Konstruktion der höheren CHERN–Klassen von der “BGL”–Variante in die Sprache der G– oder der KG–Konstruktion und betrachten dafür folgendes Diagramm:

$$(76) \quad \begin{array}{ccccccc} K_k(A) & \xrightarrow{\cong} & \pi_k(BGL(A)^+) & \xrightarrow{\text{Hurewicz}} & H_k(BGL(A)^+, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H_k(GL(A), \mathbb{Z}) \xrightarrow{H^{-k}(c_{p,A})} H^{2p-k}(A, \mathcal{F}) \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ K_k(A) & \xrightarrow{\cong} & \pi_k[\mathcal{GP}_A] & \xrightarrow{\text{Hurewicz}} & H_k([\mathcal{GP}_A], \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H_k(\mathbb{Z}[\mathcal{GP}_A]) \xrightarrow{(?)} H^{2p-k}(A, \mathcal{F}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ & & \pi_k[\mathbb{K}G^{\perp} \mathcal{P}_A]^{\perp} & \xrightarrow{\text{Hurewicz}} & H_k([\mathbb{K}G^{\perp} \mathcal{P}_A]^{\perp}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H_k(\mathbb{Z}[\mathbb{K}G^{\perp} \mathcal{P}_A]^{n_a}) \xrightarrow{(?)} H^{2p-k}(A, \mathcal{F}) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & H_k(\mathbb{Z}K(\mathcal{P}_A)^{n_a}) \xrightarrow{(?)} H^{2p-k}(A, \mathcal{F}) \end{array}$$

Unser Ziel ist, eine explizite Formel für eine der Abbildungen aus (76) zu geben, welche durch ein (?) markiert wurden. In dieser Arbeit wird dieses Ziel nur partiell verwirklicht. Wir konstruieren allgemein für eine glatte projektive Varietät X (im Kontrast zum Spezialfall $X = \text{Spec } A$) eine **Komplex–Abbildung** nach \mathcal{F} , ausgehend von einem Komplex $\mathbb{Z}K(\tilde{\mathcal{P}}_X)$, welcher als Erzeugende im Grad k Paare der Form $(E^{\bullet[k]}, h^{\bullet[k]})$ hat. Dabei ist $E^{\bullet[k]}$ ein typisches erzeugendes Element aus $\mathbb{Z}K(\mathcal{P}_X)$, also ein in jeder der k Richtungen exakter Multikomplex von Vektorbündeln auf X , und $h^{\bullet[k]}$ ist eine geeignete Metrik auf dem assoziierten komplexen Vektorbündel $E^{\bullet[k]}(\mathbb{C})$ über $X(\mathbb{C})$. Der Komplex \mathcal{F} wird eng mit der Berechnung der reellen DELIGNE–Kohomologie oder der DE RHAM–Kohomologie verbunden sein.

Wir versuchen, Abbildungen folgender Form zu konstruieren:

$$(77) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \mathbb{Z}[E^{\bullet[k]}, h^{\bullet[k]}] & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathbb{Z}[E^{\bullet[1]}, h^{\bullet[1]}] \longrightarrow \mathbb{Z}[E, h] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow c_{k,p} & & & & \downarrow c_{1,p} & & \downarrow c_{0,p} \\ \dots & \longrightarrow & \mathcal{F}^{2p-k} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{F}^{2p-1} & \longrightarrow & \mathcal{F}^{2p} \longrightarrow \dots \end{array}$$

Ein solcher Komplexmorphismus würde in Kohomologie die Abbildungen $c_{k,p}$ aus (75) induzieren, und wir machen vor und nach dem kohomologischen Übergang keinen Unterschied in der Bezeichnung. Um in Evidenz zu setzen, auf welchen Elementen die Abbildungen $c_{k,p}$ definiert sind, steht mit gewissem Notationsmißbrauch $\mathbb{Z}[E^{\bullet[k]}, h^{\bullet[k]}]$ für die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}K_k(\tilde{\mathcal{P}}_X)$, die von metrisierten exakten k –Multikomplexen $E^{\bullet[k]}$ erzeugt ist. Die Exaktheit eines metrisierten Multikomplexes bezieht sich nur auf die erste Komponente und führt keine Einschränkung für die Metriken ein.

Ändert man die metrische Komponente eines formalen Erzeugenden $[E^{\bullet[k]}, h_1^{\bullet[k]}]$ in $h_2^{\bullet[k]}$, so ändert sich das Bild $c_{k,p}([E^{\bullet[k]}, h^{\bullet[k]}])$ um einen Rand, da $0 \rightarrow E^{\bullet[k]} = E^{\bullet[k]} \rightarrow 0$ als einen $(k+1)$ –Multikomplex aufgefaßt werden kann, wo diese zwei nichttrivialen Schichten mit den Metriken h_1 und h_2 entsprechend versehen werden. Dies zeigt, daß für kohomologische Zwecke die metrische Zusatzstruktur eingebaut werden darf.

Die höheren CHERN–Charaktere sind für $k \geq 1$ mittels der Abbildungen $c_{k,p}$ eingeführt: ([Hu], [Sch])

$$(78) \quad \text{ch}_k(x) := \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} c_{k,p}(x)$$

Da wir später rationale Koeffizienten aufnehmen, ist das Studium der CHERN–Klassen $c_{k,p}$ äquivalent zum Studium des CHERN–Charakters ch .

3. Die höheren CHERN–Formen

Die Konstruktion der Abbildungen $c_{k,p}$ aus (77) –oder äquivalent die Konstruktion von ch – erfolgt nach folgender Strategie:

A.

Die CHERN–Charaktere von der nullten K–Theorie sind gut verstanden und liefern eine „Randbedingung“ für den Formalismus der höheren CHERN–Klassen. Dadurch ist die bekannte Abbildung $c_{0,p}$ festgelegt. Für den speziellen Fall der de Rham–Kohomologie ist diese Abbildung nicht nur auf die Kohomologie definiert, sondern sogar elementweise für Vektorbündeln E mit einem festen Zusammenhang ∇ (auf dem komplexifizierten Bündel), und die Werte liegen in dem diagonalen Anteil A^{pp} des DOLBEAULT–Komplexes. (Man kann alternativ mit einer Metrik auf dem Bündel arbeiten und den assoziierten metrischen Zusammenhang benutzen.) Diese Werte sind also *Formen* und *nicht nur Klassen*, ein zentraler Punkt unserer Konstruktion von *höheren CHERN–Formen* in der DE RHAM–bzw. DELIGNE–Kohomologie.

Für den nullten CHERN Charakter der DE RHAM–Kohomologie gilt die wohlbekannte Formel:

$$(79) \quad \text{ch}(E, \nabla) := \text{Spur} \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \nabla^2 \right) \in \bigoplus_p A^{pp}$$

Diese Formen können auch für die DELIGNE–Kohomologie als „Randbedingung“ genommen werden, interpretiert man $(\bigoplus A^{pp})^{(-1)^p}$ als $\bigoplus D^{2p}(A, p)$. Der Komplex $D^\bullet(A, p)$ wird im Kapitel 8 erklärt und in Verbindung mit der reellen DELIGNE–Kohomologie zusammengebracht. Die wesentlichen Eigenschaften sind die Verträglichkeit der additiven und multiplikativen Strukturen:

$$(80) \quad \text{ch}(E_1 \oplus E_2, \nabla_1 \oplus \nabla_2) = \text{ch}(E_1, \nabla_1) + \text{ch}(E_2, \nabla_2)$$

$$(81) \quad \text{ch}(E_1 \otimes E_2, \nabla_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \nabla_2) = \text{ch}(E_1, \nabla_1) \wedge \text{ch}(E_2, \nabla_2)$$

B.

Wir versuchen des weiteren iterativ die Randbedingung $c_{0,p}$ zu einer Komplexabbildung zu vervollständigen. Ist $c_{(k-1),p}$ bereits konstruiert, so ist $d \circ c_{k,p}$ dadurch festgelegt, und die Aufgabe ist nun die Konstruktion einer „Stammform“ bezüglich $d : \mathcal{F}^{2p-k} \rightarrow \mathcal{F}^{2p-(k-1)}$. Die Transgressionsformeln aus dem Theorem 1.5 des Kapitels 9 verbinden d mit dem Differential d_t von Formen auf $\mathbb{R}_{>0}^k$. Dabei produziert der Parameter $t \in \mathbb{R}_{>0}^k$ eine Deformation der differentialgeometrischen Zusatzstruktur. Eine „Stammform“ zu d_t ist durch Bildung eines (regularisierten) Integrals einfach zu konstruieren. Eine „Stammform“ zu d kann nun explizit angegeben werden.

Multiplikative Strukturen und die Deligne–Kohomologie

Wir zitieren Resultate über die reelle DELIGNE–Kohomologie aus den Arbeiten [Bu] und [Wa]. Der Komplex, den wir gleich beschreiben werden, wurde nach meiner Kenntnis zuerst in der Doktorarbeit von XUESUNG WANG betrachtet. Er entsteht durch Abschneiden des DOLBEAULT–Komplexes. Aus diesem Grund benutze ich dafür den Namen “trunkierter DOLBEAULT–Komplex”. WANG hat diesen Komplex für den Zweck der Erklärung einer Abbildung mit Werten in der reellen DELIGNE–Kohomologie eingeführt. BURGOS benutzt diesen Komplex allgemein für glatte Varietäten, um eine nähere Untersuchung der Multiplikation in ihrer reellen DELIGNE–Kohomologie zu erlangen. Er gibt auch einen Beweis der Tatsache, daß dieser Komplex die reelle DELIGNE–Kohomologie berechnet, und benutzt strukturell implizit das Oktogon–Axiom in der triangulierten Kategorie der Komplexe. (WANG gibt dafür einen *ad-hoc* Beweis, der nur im projektiven Fall gilt.)

Wir werden zuerst die multiplikative Struktur nach BURGOS beschreiben. In den weiteren Abschnitten übertragen wir eine HODGE–Theorie für die reelle DELIGNE–Kohomologie und heben die Rolle des Oktogon–Axioms hervor.

1. Der trunkierte DOLBEAULT–Komplex

BURGOS konstruiert für eine glatte Varietät X über dem komplexen Körper eine Garbe $\mathcal{E}_{\log}(X)$ mit den folgenden Eigenschaften (siehe [Bu]):

- $\mathcal{E}_{\log}(X)$ ist die Garbe der Differentialformen mit logarithmischen Singularitäten entlang eines Divisors mit normalen Schnitten $Y = \overline{X} - X$ für eine entsprechende glatte Kompaktifizierung \overline{X} von X . Diese Garbe hängt von einer speziellen Kompaktifizierung nicht ab.
- Sie besitzt eine natürliche Bigraduierung $\mathcal{E}_{\log}(X) = \bigoplus \mathcal{E}_{\log}^{p,q}(X)$, eine natürliche Ableitung d und eine komplexe Struktur, bezüglich der wir den reellen Anteil $\mathcal{E}_{\log,\mathbb{R}}(X)$ bilden.
- $\mathcal{E}_{\log}(X)$ ist weich: Ihre Restriktionsabbildungen sind surjektiv. Sie ist aus diesem Grund azyklisch. Der Ring der globalen Schnitte dieser Garbe, $E_{\log}(X)$ kann für kohomologische Zwecke benutzt werden:

$$H^*(X, \mathbb{C}) = H^*(E_{\log}(X), d)$$

- $E_{\log}(X)$ ist natürlich mit einer gemischten HODGE–Struktur eingepreßt, die durch die obige Gleichheit die HODGE–Struktur der Kohomologie mit komplexen Koeffizienten reflektiert.

Diese Garbe ist geeignet für die Berechnung der reellen DELIGNE–Kohomologie: Man definiert nach BURGOS:

$$(82) \quad \begin{aligned} E_{\log,\mathbb{R}}(X, p) &:= (2\pi i)^p E_{\log,\mathbb{R}}(X) \quad \text{und} \\ E_{\log,\mathbb{R}}(X, p)_{\mathcal{D}} &:= s \left(E_{\log,\mathbb{R}}(X, p) \oplus F^p E_{\log}(X) \xrightarrow{\text{Differenz}} E_{\log}(X) \right). \end{aligned}$$

Dabei steht $s(K^\bullet \rightarrow L^\bullet)$ für den “Simple–Komplex”, den einfachen oder totalen Komplex, assoziiert dem Doppelkomplex $\cdots \rightarrow 0^\bullet \rightarrow K^\bullet \rightarrow L^\bullet \rightarrow 0^\bullet \cdots$.

BURGOS isoliert nun die Struktur in dem Begriff einer DOLBEAULT–Algebra, denn kohomologische Aussagen in Verbindung mit dem Komplex $\mathcal{E}_{\log}(X)$ sind funktoriell von der Kategorie dieser DOLBEAULT–Komplexe und bedürfen keiner zusätzlichen Information.

DEFINITION 1.1. *Eine DOLBEAULT–Algebra ist eine differentiale Algebra über \mathbb{R} , $(A_{\mathbb{R}}^*, +, \cdot, d)$, mit einer ausgezeichneten Bigraduierung nach komplexer Erweiterung der Skalare auf $A_{\mathbb{C}}^* := A_{\mathbb{R}}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$:*

$$A_{\mathbb{C}}^n = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q},$$

so daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Wir bezeichnen auch mit d das Differential auf dem komplexifizierten Raum $A_{\mathbb{C}}^*$. Es hat Grad 1, so daß eine Zerlegung in Bigrade $(1, 0)$ und $(0, 1)$ kanonisch erfolgt: $d = \partial + \overline{\partial}$.
- Die komplexe Konjugation induziert einen Isomorphismus von $A^{p,q}$ nach $A^{q,p}$.

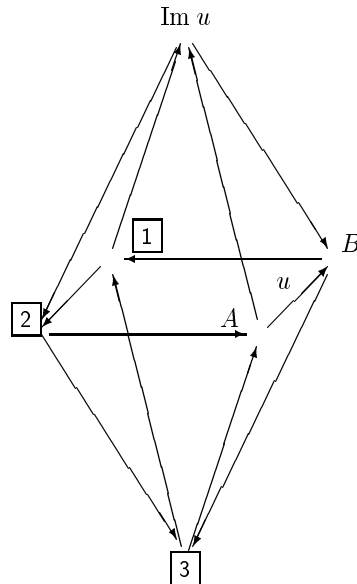


ABBILDUNG 1. Das Oktogondigramm

- Unter diesem Isomorphismus ist ∂ und $\bar{\partial}$ konjugiert.

Wir untersuchen nun die Kategorie der DOLBEAULT-Algebren.

Sie besitzen eine kanonische HODGE-Filtration: $F^p A := F^p A_{\mathbb{C}}^*$ besteht aus Elementen vom Bigrad $(*, *)$.

Die p -Twistung mit der Periode $2\pi i$ ist formal definiert: $A_{\mathbb{R}}^*(p) := (2\pi i)^p A_{\mathbb{R}}^* \subseteq \mathbb{C}$.

Diese wird für die Einführung des DELIGNE-artigen Komplexes

$$(83) \quad A_{\mathbb{R}}^*(p)_{\mathcal{D}} := s \left(A_{\mathbb{R}}^*(p) \oplus F^p A_{\mathbb{C}}^* \xrightarrow{u := \text{Differenz}} A_{\mathbb{C}}^* \right)$$

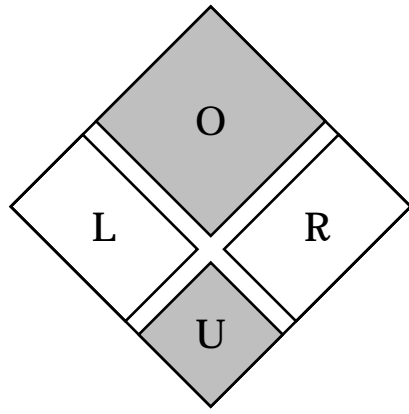
benötigt. Für das Studium des Komplexes (83) betrachten wir im allgemeinen funktorielle Konstruktionen zum einfachen Komplex $s = s(u : A \rightarrow B)$ der Komplexabbildung u .

2. Das Oktogon-Diagramm

Das Oktogon-Diagramm, entsprechend dem Morphismus u aus der definierenden Relation (83), läßt sich in mehreren Schritten aufbauen. Wir betrachten dafür eine allgemeine Komplexabbildung u wie im Bild (1) an der Seite 96. Wir lassen sie durch das Bild $\text{Im } u$ faktorisieren, wie im Dreieck A , $\text{Im } u$, B in dem Bild. Wir füllen nun die fehlenden Ecken, die folgenden Bedingungen unterliegen:

- $\boxed{1} \rightarrow B \rightarrow \text{Im } u \rightarrow \boxed{1}$ ist ein exaktes Dreieck. Es folgt $\boxed{1} = \text{Coker } u$.
- Das Dreieck $A \rightarrow \text{Im } u \rightarrow \boxed{2} \rightarrow A$ ist exakt. Dabei ist $\boxed{2} \rightarrow A$ ein Morphismus vom Grad -1 . Es folgt: $\boxed{2} = \text{Ker } u[1]$.
- Das Dreieck mit den Ecken $\text{Im } u$, $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ ist kommutativ. Die Abbildung $\boxed{1} \rightarrow \boxed{2}$ ist also die Verknüpfung der residualen Abbildungen $\boxed{1} \rightarrow \text{Im } u$ und $\text{Im } u \rightarrow \boxed{2}$ aus den obigen exakten Dreiecken.
- In der unteren Hälfte des Oktogons sind die Dreiecke $A \rightarrow B \rightarrow \boxed{3} \rightarrow A$ und $\boxed{1} \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{1}$ exakt. Dies erlaubt uns $\boxed{3}$ einerseits mit dem einfachen Komplex s der Abbildung u aus dem ersten Dreieck, andererseits mit dem (um -1 verschobenen) einfachen Komplex \hat{s} der Abbildung $\boxed{1} \rightarrow \boxed{2}$ zu identifizieren.
- Die anderen zwei unteren Dreiecke sind kommutativ.

Da wir das Oktogon-Diagramm in der derivierten Kategorie schreiben, sind die Komplexe s und \hat{s} quasiisomorph. BURGOS zeigt, diese Komplexe sind isomorph in der homotopischen Kategorie, gibt zwei Abbildungen $\phi : \hat{s} \rightarrow s$ und $\psi : s \rightarrow \hat{s}$ mit $\psi\phi = 1$ an und berechnet explizit eine Homotopie zwischen $\phi\psi$ und 1 . Dann überträgt er die multiplikative Struktur von s auf \hat{s} für den speziellen Fall einer Abbildung (83), die einer DOLBEAULT-Algebra assoziiert wird. Wir bezeichnen nach BURGOS in diesem speziellen Fall den entsprechenden Komplex \hat{s} zu $s = A_{\mathbb{R}}^*(p)_{\mathcal{D}}$ durch $\mathfrak{D}^*(A, p)$ und beschreiben im nächsten Abschnitt seine Resultate zu diesen zwei multiplikativen Komplexen.



$$\begin{aligned} \text{oben}_{[p]} &:= O := F^p \cap \overline{F}^p \\ \text{links}_{[p]} &:= L := F^p \cap \overline{F}^{\bullet < p} \\ \text{rechts}_{[p]} &:= R := F^{\bullet < p} \cap \overline{F}^p \\ \text{unten}_{[p]} &:= U := F^{\bullet < p} \cap \overline{F}^{\bullet < p} . \end{aligned}$$

ABBILDUNG 2. Schematische Zerlegung des Dolbeault-Komplexes

3. Die Resultate von BURGOS

Wir betrachten die Zerlegung des DOLBEAULT-Komplexes $A = U \oplus L \oplus R \oplus O$ wie in der Abbildung 2 an der Seite 97. Dann gelten folgende Relationen:

$$(84) \quad \text{Ker } u = \text{oben}_{[p]}(p) , \quad \text{Coker } u = \text{unten}_{[p]}(p-1) ,$$

$$(85) \quad \mathfrak{D}^*(A, p) = s \left(\text{Coker } u \xrightarrow{-2\partial\bar{\partial}} \text{Ker } u[1] \right) [-1] = \begin{bmatrix} \text{unten}_{[p]}(p-1)[-1] \\ \oplus \\ \text{oben}_{[p]}(p) \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{◇}^{(p)} \\ \text{◇}^{(p-1)} \end{array} ,$$

(85)

wobei *etc*(p) auf den $(-1)^p$ -Eigenraum der komplexen Konjugation angedeutet. Die Verbindung zwischen dem unteren und oberen Anteil im schematischen Bild aus (85) ist der Morphismus $\boxed{1} \rightarrow \boxed{2}$ aus dem Bild 1 und gleicht (faktoriert über) $-2\partial\bar{\partial} : A^{p-1, p-1} \rightarrow A^{pp}$. Er bildet den $(-1)^{p-1}$ -Eigenraum in den $(-1)^p$ -Eigenraum. Diese Abbildung, $-2\partial\bar{\partial}$, ist auch das Differential in $\mathfrak{D}^*(A, p)$ vom Grad $*$ = $(2p-1)$ in den Grad $*$ = $2p$. Das Differential in den anderen Graden gleicht dem Differential des oberen Bereiches, wenn es aus Grad $*$ $\geq 2p$ ausgeht, und dem Differential des unteren Bereiches, wenn es in Grad $*$ $\leq 2p-1$ landet. Das Differential des unteren Bereiches ist die Projektion des üblichen Differential d **mit dem Vorzeichen (-1) für die Verschiebung von $\text{Coker } u[-1]$** . Dies ist ein wichtiger Punkt, der für die Multiplikativität des CHERN-Formcharakters sorgt.

Wir kopieren nun das Theorem 2.3 aus [Bu]:

THEOREM 3.1. *Sei $(A, +, \wedge, d)$ eine DOLBEAULT-Algebra. Sei $\alpha \in [0, 1]$. Die multiplikative Struktur:*

$$A_{\mathbb{R}}^*(p)_{\mathcal{D}} \otimes A_{\mathbb{R}}^*(q)_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\bullet \alpha} A_{\mathbb{R}}^*(p+q)_{\mathcal{D}}$$

übersetzt sich durch die entsprechenden Isomorphismen in der homotopischen Kategorie in eine multiplikative Struktur:

$$\mathfrak{D}^*(A, p) \otimes \mathfrak{D}^*(A, q) \longrightarrow \mathfrak{D}^*(A, p+q) ,$$

die von dem Parameter α nicht mehr abhängt, und das Produkt in der reellen DELIGNE-Kohomologie induziert.

Dieses Produkt ist \mathbb{S} -kommutativ und assoziativ bis auf eine natürliche Homotopie.

Das Produkt von zwei Elementen $x \in \mathfrak{D}^n(A, p)$ und $y \in \mathfrak{D}^m(A, q)$ ist $x \cdot y \in \mathfrak{D}^l(A, r)$ mit $l := n+m$, $r := p+q$ und wird durch die folgende explizite Formel erklärt:

$$x \cdot y = \begin{cases} (-1)^n r_p(x) \wedge y + x \wedge r_q(y) & \text{falls } n < 2p \text{ und } m < 2q, \\ \mathbf{Proj}_{\text{unten}_{[r]}}(x \wedge y) & \text{falls } n < 2p, \ m \leq 2q \text{ und } l < 2r, \\ \mathbf{Proj}_{\text{oben}_{[r]}}(r_p(x) \wedge y) + 2\mathbf{Proj}_{A(r)} \partial((x \wedge y)^{r-1, l-r}) & \text{falls } n < 2p, \ m \leq 2q \text{ und } l \geq 2r, \\ x \wedge y & \text{falls } n \geq 2p \text{ und } m \geq 2q, \end{cases}$$

wobei $r_p : \mathfrak{D}^*(A, p) \rightarrow A_{\mathbb{R}}^*(p)$ die folgende Abbildung ist:

$$r_p(x) := \begin{cases} \partial x^{p-1, *-p} - \bar{\partial} x^{*-p, p-1} & \text{falls } * \leq 2p-1, \\ x & \text{falls } * \geq 2p. \end{cases}$$

Ist $x \in \mathfrak{D}^{2p}(A, p)$ ein Zykel, so gelten $x \cdot y = y \cdot x$ und $x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z = y \cdot (x \cdot z)$ für alle y und z .

4. Pseudokomplexe

Im diesem Abschnitt werden wir den Mechanismus verwenden, wodurch mittels des Oktogon-Diagramms einem einfachen Komplex s der einfache Komplex \hat{s} zugeordnet wird. Als Motivation betrachten wir zuerst folgendes differentialgeometrisches Beispiel:

$$(A(\text{End}(\mathcal{E})), +, \cdot, \nabla) .$$

∇ ist dabei der auf Endomorphismen induzierte Zusammenhang, ausgehend von einem Zusammenhang auf dem Bündel E , welcher die lokalfreie Garbe von glatten Schnitten \mathcal{E} besitzt. Wir erhalten i.a. keinen Komplex, denn die Relation $\nabla^2 = 0$ gilt nur im Falle eines flachen Zusammenhangs. Wir benutzen deswegen dafür die Terminologie: "Pseudo-Komplex" und nennen ∇ "Pseudo-Differential".

Diese Arbeit benutzt nicht wesentlich die folgenden Resultate über Pseudo-Komplexe, es ist jedoch im Auge des Autors wichtig, für Komplexe bekannte Konstruktionen auch für Pseudo-Komplexe zu übertragen.

4.1. Pseudokomplexe. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie.

Sei $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ die Kategorie der \mathbb{Z} -Graduierten Objekte in \mathcal{A} . Die Morphismen respektieren die Graduierung der Objekte. Insbesondere ist der Grad eines Morphismus u , $|u|$, definiert.

DEFINITION 4.1. Die Kategorie der Pseudokomplexe von \mathcal{A} , $\Psi\text{Kom}(\mathcal{A})$ hat

Objekte Paare:

$$(A, \nabla_A) \quad \begin{array}{l} A \text{ ist Objekt in } \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \\ \nabla_A \in \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}(A, A) \text{ von Grad } 1. \end{array}$$

Morphismen Morphismen aus $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, die verträglich mit der zusätzlichen Struktur sind. Die Verträglichkeit ist im Sinne der Superkommutativität gemeint. Für $u \in \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}(A, B)$ und $(A, \nabla_A), (B, \nabla_B)$ Objekte in $\Psi\text{Kom}(\mathcal{A})$ bezeichnen wir mit $[\nabla, u]$ den gemischten Superkommutator:

$$[\nabla, u] = \nabla_B u + (-1)^{|u|} u \nabla_A$$

u ist Morphismus genau dann, wenn $[\nabla, u] = 0$.

Die Kategorie der Komplexe in \mathcal{A} , $\text{Kom}(\mathcal{A})$, ist eine volle Unterkategorie von $\Psi\text{Kom}(\mathcal{A})$. Sie besteht aus Objekten (A, ∇_A) mit $\nabla_A^2 = 0$.

Zwei Morphismen sind homotop, wenn die Differenz ein (gemischter) Superkommutator der Form $[\nabla, H]$ ist. H ist ein Morphismus in $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ und wird Homotopie genannt. (Der Grad von H ist um 1 weniger als der gemeinsame Grad der zwei Morphismen.)

4.2. Die Faktorisierung eines Morphismus über sein Bild. Sei $u : A \rightarrow B$ ein Morphismus in der Kategorie der Pseudokomplexe von \mathcal{A} . Die kanonische Zerlegung

$$u = u_1 u_0, \quad A \xrightarrow{u_0} \text{Im } u \xrightarrow{u_1} B$$

induziert folgende obere Hälfte eines Oktagon-Diagramms in $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$:

$$(86) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Coker } u & \xleftarrow{\pi} & B & & \\ & \searrow \text{Res}_1 & \nearrow u_1 & & \\ & & \text{Im } u & & \\ & \nearrow \text{Res}_0 & \nwarrow u_0 & & \\ & & A & & \\ \text{Ker } u[1] & \xleftarrow{\iota} & A & & \end{array}$$

$\text{Res}_0 \text{Res}_1$ (left vertical arrow), u (right vertical arrow), π (top horizontal arrow), ι (bottom horizontal arrow), u_1 (top-right diagonal arrow), u_0 (bottom-right diagonal arrow), Res_1 (top-left diagonal arrow), Res_0 (bottom-left diagonal arrow).

Dabei sind wir gezwungen, den Rahmen der Kategorie $\Psi\text{Kom}(\mathcal{A})$ zu verlassen. Res_0 und Res_1 sind Morphismen in der Kategorie $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, die des weiteren konstruiert werden. Ist $u : (A, \nabla_A) \longrightarrow (B, \nabla_B)$ sogar ein Komplexenmorphimus ($\nabla_A^2 = \nabla_B^2 = 0$), so wird dann (86) ein oberes Oktagon-Diagramm in der triangulierten Kategorie $\text{Kom}(\mathcal{A})$ sein.

Um eine explizite Form für die Residuen Res_0 und Res_1 zu haben, nehmen wir an, die distinguierten Triangles

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } u & \xrightarrow{\iota} & A & \xrightarrow{u_0} & \text{Im } u & \xrightarrow{\text{Res}_0} & \text{Ker } u[1] \\ \text{Im } u & \xrightarrow{u_1} & B & \xrightarrow{\pi} & \text{Coker } u & \xrightarrow{\text{Res}_1} & \text{Im } u[1] \end{array}$$

sind split in $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Die Schnitte und die Retraktionen σ_0, σ_1 bzw. τ_0, τ_1 sind die fehlenden kanonischen Mono- bzw. Epimorphismen in den Diagrammen:

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Im } u & & & \text{Im } u \\ & \downarrow u_1 & & & \downarrow \sigma_0 \\ \text{Coker } u & \xrightarrow{\sigma_1} & B & \xrightarrow{\tau_1} & \text{Im } u \\ & \downarrow \pi & & & \downarrow \tau_1 \\ & \text{Coker } u & & & \text{Ker } u \end{array}$$

$$\begin{aligned} \pi \sigma_1 &= \mathbf{1}_{\text{Coker } u} \\ \tau_1 u_1 &= \mathbf{1}_{\text{Im } u} \\ \mathbf{1}_B &= \sigma_1 \pi + u_1 \tau_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 \sigma_0 &= \mathbf{1}_{\text{Im } u} \\ \tau_0 \iota &= \mathbf{1}_{\text{Ker } u} \\ \mathbf{1}_A &= \sigma_0 u_0 + \iota \tau_0 \end{aligned}$$

Wir definieren Res_0 und Res_1 eindeutig durch:

$$\text{Res}_1 : \text{Coker } u \longrightarrow \text{Im } u \text{ vom Grad } 1, \quad \text{Res}_0 : \text{Im } u \longrightarrow \text{Ker } u \text{ vom Grad } 1,$$

$$\begin{aligned} u_1 \text{Res}_1 &= [\sigma_1, \nabla] & \iota \text{Res}_0 &= [\sigma_0, \nabla] \\ \text{Res}_1 \pi &= [\nabla, \tau_1] & \text{Res}_0 u_0 &= [\nabla, \tau_0] \end{aligned}$$

i.e. $\pm[\sigma_i, \nabla]$ faktorisiert, und Res_i ist durch eine der zwei kompatiblen obigen Relationen wohldefiniert. ($i = 1, 2$.)

4.3. Die Pseudokomplexe s und \hat{s} . Das obere Oktagon-Diagramm läßt sich zu einem vollständigen Diagramm erweitern. Dies gilt, nur wenn u in der Homotopiekategorie betrachtet wird. Dies erklärt in diesem Fall die Kegelkomplexe der Abbildungen u und $\text{Res}_0 \text{Res}_1$ für äquivalent in der Homotopiekategorie. Der folgende Satz versucht diesem Fakt im größeren Rahmen der Pseudokomplexe ein Analogon zu verschaffen.

SATZ 4.2. Seien die Morphismen ϕ, ψ und die Pseudokomplexe \hat{s}, s definiert durch:

$$\hat{s} := \begin{bmatrix} \text{Coker } u[-1] \\ \oplus \\ \text{Ker } u \end{bmatrix} \xrightleftharpoons[\psi := \begin{bmatrix} \cdot & \pi \\ \tau_0 & \text{Res}_0 \tau_1 \end{bmatrix}]{\phi := \begin{bmatrix} -\sigma_0 \text{Res}_1 & \iota \\ \sigma_1 & \cdot \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} A \\ \oplus \\ B[-1] \end{bmatrix} =: s$$

mit Pseudodifferential $\begin{bmatrix} -\nabla & \cdot \\ \text{Res}_0 \text{Res}_1 & \nabla \end{bmatrix}$ mit Pseudodifferential $\begin{bmatrix} \nabla & \cdot \\ u & -\nabla \end{bmatrix}$

(1) ϕ ist **kein** Morphismus von Pseudokomplexen. Es gilt jedoch (87).

(2) ψ ist **kein** Morphismus von Pseudokomplexen. Es gilt jedoch (88).

(3) $\phi\psi = \mathbf{1}_{\hat{s}}$.

(4) $\psi\phi \cong \mathbf{1}_s$ sind "homotop". (Vorsicht: $\psi\phi$ ist kein Pseudomorphismus.) Es gilt genauer (89).

$$(87) \quad [\nabla, \phi] = \begin{bmatrix} -\sigma_0[\nabla, \text{Res}_1] & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$(88) \quad [\nabla, \psi] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & [\nabla, \text{Res}_1]\tau_1 \end{bmatrix}$$

$$(89) \quad \psi\phi - \mathbf{1}_{\hat{s}} = -[\nabla_s, H], \quad \text{wobei } H := \begin{bmatrix} \cdot & \sigma_0 \tau_1 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

BEMERKUNG 4.3. Sind (A, ∇_A) und (B, ∇_B) Komplexe, so gilt dann

$$[\nabla, \phi] = [\nabla, \psi] = 0,$$

und die Morphismen ϕ und ψ sind homotope Inversen.

Beweis von Satz (4.2):

(1)

$$\begin{aligned} \phi \nabla_{\hat{s}} &= \begin{bmatrix} -\sigma_0 \text{Res}_1 & \iota \\ \sigma_1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\nabla & \cdot \\ \text{Res}_0 \text{Res}_1 \nabla & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 \text{Res}_1 \nabla + \iota \text{Res}_0 \text{Res}_1 & \iota \nabla \\ -\sigma_1 \nabla & \cdot \end{bmatrix} \\ \nabla_s \phi &= \begin{bmatrix} \nabla & \cdot \\ u & \nabla \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sigma_0 \text{Res}_1 & \iota \\ \sigma_1 & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla \sigma_0 \text{Res}_1 & \nabla \iota \\ -u \sigma_0 \text{Res}_1 - \nabla \sigma_1 & u \iota \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und nun sind die Einträge der Matrix $\phi \nabla - \nabla \phi$:

$$\begin{aligned} (*) : (\sigma_0 \text{Res}_1 \nabla + \iota \text{Res}_0 \text{Res}_1) - (-\nabla \sigma_0 \text{Res}_1) &= \\ &= \sigma_0 \text{Res}_1 \nabla + (\iota \text{Res}_0 + \nabla \sigma_0) \text{Res}_1 \\ &= \sigma_0 \text{Res}_1 \nabla + \sigma_0 \nabla \text{Res}_1 \\ &= \sigma_0 [\nabla \text{Res}_1] \end{aligned}$$

$$(*) : \iota \nabla = \nabla \iota, \text{ i.e. } \iota \text{ Morphismus.}$$

$$(*) : -u \sigma_0 \text{Res}_1 - \nabla \sigma_1 = -u_1 u_0 \sigma_0 \text{Res}_1 - \nabla \sigma_1 = -u_1 \text{Res}_1 - \nabla \sigma_1 = -[\sigma_1 \nabla] - \nabla \sigma_1 = -\sigma_1 \nabla.$$

$$(*) : u \iota = 0.$$

Es folgt:

$$(\phi \nabla - \nabla \phi) = [\phi, \nabla] = \begin{bmatrix} \sigma_0 [\nabla \text{Res}_1] & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} \psi \nabla_s &= \begin{bmatrix} \cdot & \pi \\ \tau_0 & \text{Res}_0 \tau_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla & \cdot \\ u & -\nabla \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi u & -\pi \nabla \\ \tau_0 \nabla + \text{Res}_0 \tau_1 u & -\text{Res}_0 \tau_1 \nabla \end{bmatrix} \\ \nabla_{\hat{s}} \psi &= \begin{bmatrix} -\nabla & \cdot \\ \text{Res}_0 \text{Res}_1 & \nabla \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \pi \\ \tau_0 & \text{Res}_0 \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & -\nabla \pi \\ \nabla \tau_0 & \text{Res}_0 \text{Res}_1 \pi + \nabla \text{Res}_0 \tau_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Einträge ergibt:

$$(*) : \pi u = 0.$$

(*) : $-\pi\nabla = -\nabla\pi$. (π ist Morphismus.)

(*) : $\tau_0\nabla + \text{Res}_0\tau_1 u = \tau_0\nabla + \text{Res}_0\tau_1 u_1 u_0 = \tau_0\nabla + \text{Res}_0 u_0 = \tau_0\nabla + [\nabla, \tau_0] = \nabla\tau_0$.

(*) : $\text{Res}_0\text{Res}_1\pi + \nabla\text{Res}_0\tau_1 - (-\text{Res}_0\tau_1\nabla) =$
 $= \text{Res}_0[\nabla, \tau_1] + \nabla\text{Res}_0\tau_1 + \text{Res}_0\tau_1\nabla$
 $= \text{Res}_0\nabla\tau_1 + \nabla\text{Res}_0\tau_1$
 $= [\nabla, \text{Res}_0]\tau_1$.

Es folgt:

$$(\psi\nabla - \nabla\psi) = [\psi, \nabla] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & -[\nabla, \text{Res}_0]\tau_1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$\psi\phi = \begin{bmatrix} \cdot & \pi \\ \tau_0 & \text{Res}_0\tau_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sigma_0\text{Res}_1 & \iota \\ \sigma_1 & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi\sigma_1 & \cdot \\ -\tau_0\sigma_0\text{Res}_1 + \text{Res}_0\tau_1\sigma_1 & \tau_0\iota \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \cdot \\ \cdot & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

(4)

$$\begin{aligned} \phi\psi &= \begin{bmatrix} -\sigma_0\text{Res}_1 & \iota \\ \sigma_1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \pi \\ \tau_0 & \text{Res}_0\tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \iota\tau_0 & -\sigma_0\text{Res}_1\pi + \iota\text{Res}_0\tau_1 \\ \cdot & \sigma_1\pi \end{bmatrix} \\ [\nabla_s, H] &= H\nabla_s + \nabla_s H = \begin{bmatrix} \cdot & \sigma_0\tau_1 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla & \cdot \\ u & -\nabla \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla & \cdot \\ u & -\nabla \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \sigma_0\tau_1 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_0\tau_1 u & -\sigma_0\tau_1\nabla + \nabla\sigma_0\tau_1 \\ \cdot & u\sigma_0\tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 u_0 & [\nabla, \sigma_0\tau_1] \\ \cdot & u_1\tau_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die rechten obigen Einträge stimmen überein: $-\sigma_0\text{Res}_1\pi + \iota\text{Res}_0\tau_1 = -\sigma_0[\nabla\tau_1] + [\sigma_0, \nabla]\tau_1 = -\sigma_0(\nabla\tau_1 - \tau_1\nabla) + (\sigma_0\nabla - \nabla\sigma_0)\tau_1 = [\sigma_0\tau_1, \nabla]$. Die Summation ergibt nun:

$$\phi\psi + [\nabla_s, H] = \mathbf{1}_s$$

Die nächste Sorge ist die Übertragung der Multiplikation von s unter der Annahme, daß A und B Multiplikationen besitzen, die verträglich sind mit der Abbildung u und den Pseudodifferentialen. Zuerst wird diese Multiplikation auf s nach dem bereits im Falle der DELIGNE-Kohomologie bekannten Rezept eingeführt.

5. Die Multiplikation auf dem einfachen Komplex einer Abbildung

\mathcal{A} ist nunmehr eine Tensorkategorie. Sei \otimes der entsprechenden Produkt-Funktor.

$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ trägt die kanonische Struktur einer Supertensorkategorie. Damit ist folgendes gemeint: Ein neues Produkt, $\hat{\otimes}$ kann durch einfache Twistung eingeführt werden. Für

$$\begin{aligned} f : A_1 &\longrightarrow A_2 && \text{Morphismus des Grades } |f|, \\ g : B_1 &\longrightarrow B_2 && \text{Morphismus des Grades } |g| \end{aligned}$$

setzen wir

$$\begin{aligned} f\hat{\otimes}g : A_1\hat{\otimes}B_1 &:= A_1\otimes B_1 \longrightarrow A_2\hat{\otimes}B_2 := A_2\otimes B_2, \\ f\hat{\otimes}g &:= f\epsilon^{|g|} \otimes g \end{aligned}$$

Wir wollen nicht explizit die Struktur einer Superkategorie isolieren, erwähnen jedoch für weiteren umfänglichen Verbrauch die für Supertensorkategorien charakteristische Verknüpfungsregel:

$$(90) \quad (f\hat{\otimes}g) \cdot (f'\hat{\otimes}g') = (-1)^{|g||f'|} f f' \hat{\otimes} g g',$$

falls die Verknüpfungen ff' und gg' wohldefiniert sind.

Wir bereichern Pseudokomplexe (A, ∇_A) zu Strukturen der Form

$$(A, \nabla_A, m_A), \text{ wobei}$$

$$m_A : (A\hat{\otimes}A, \nabla^{\otimes 2} := \nabla_A\hat{\otimes}\mathbf{1} + \mathbf{1}\hat{\otimes}\nabla_A) \longrightarrow (A, \nabla_A)$$

ein Morphismus von Pseudokomplexen vom Grad Null ist. m_A ist assoziativ und superkommutativ bis auf Homotopie.

Sei (A, ∇_A) ein Pseudokomplex. Wir können $A[-1]$ mit einem kanonischen Pseudodifferential versehen: Die Abbildung $t : A[-1] \rightarrow A$, gegeben im Grad n durch die Identität $t^n : A[-1]^n = A^{n-1}$, hat Grad -1 , und wir definieren

das Pseudodifferential $\nabla_{A[-1]} = \nabla_{[-1]}$ durch die Bedingung, daß t ein Supermorphismus wird. Der gemischte Superkommutator $[t, \nabla] = t\nabla_{[-1]} + \nabla t$ verschwindet, also:

$$(91) \quad \nabla_{[-1]} = -t^{-1}\nabla t$$

Der Morphismus t ist sehr nützlich, um Vorzeichenprobleme in Griff zu bekommen, ohne speziell mit Vertretern expliziten Grades zu arbeiten. Für Komplexe erhalten wir den üblichen Vorzeichenwechsel bei ihren Verschiebung. Parallel zu der Definition des Deligne-Produktes in der Deligne-Kohomologie:

$$(a_p, f_p, \omega[-1]_p) \cup_\alpha (b_q, g_q, \eta[-1]_q) := \begin{pmatrix} a_p b_q, & f_p g_q, & \omega[-1]_p \cdot (\alpha b_q + (1-\alpha)g_q) \\ & & + (-1)^{|(a_p, f_p, \omega[-1]_p)|} ((1-\alpha)a_p + \alpha f_p) \eta[-1]_q \end{pmatrix}$$

für Elemente $(a_p, f_p, \omega[-1]_p)$ und $(b_q, g_q, \eta[-1]_q)$ aus dem einfachen Komplex der Abbildung $A(p) \oplus F^p A \rightarrow A$, können wir folgende Verallgemeinerung formulieren.

SATZ 5.1. *Seien (A, ∇_A, m_A) und (B, ∇_B, m_B) zwei Pseudokomplexe mit multiplikativer Struktur. Seien u_1 und u_2 zwei Morphismen von A nach B , die verträglich mit der vorliegenden Struktur sind. Zu dem einfachen Komplex $s := s(u)$ der Abbildung zwischen Pseudokomplexen: $u := u_1 - u_2 : (A, \nabla_A) \rightarrow (B, \nabla_B)$ definieren wir folgende Abbildungen:*

$$\begin{aligned} \cup_\alpha &: s(u) \hat{\otimes} s(u) \longrightarrow s(u) \\ \cup_\alpha &= i m_A p \hat{\otimes} p \\ &\quad + j t^{-1} m_B (tq \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2)p + ((1-\alpha)u_1 + \alpha u_2)p \hat{\otimes} tq) \end{aligned}$$

Dabei sind i, j und p, q die kanonischen Mono- bzw. Epimorphismen zu den Summanden A und $B[-1]$ von $s(u)$. Dann gelten folgende Aussagen:

- Die Abbildungen \cup_α sind verträglich mit den Pseudodifferentialen aus $s(u) \hat{\otimes} s(u)$ und $s(u)$. Sie sind Morphismen von Pseudokomplexen.
- Die Morphismen \cup_α und \cup_β sind homotop: Die Differenz ist ein gemischter Superkommutator der Form: $\cup_\alpha - \cup_\beta = (\alpha - \beta)[\nabla, K]$.
- Die Abbildung \cup_α ist assoziativ bis auf Homotopie, und für $\alpha = 0, 1$ gilt die reine Assoziativität.

Beweis: Das Pseudodifferential auf $s(u)$ ist gegeben durch:

$$(92) \quad \nabla_s = i\nabla_A p + jt^{-1}up + j\nabla_{B[-1]}q$$

Wir prüfen zuerst, daß \cup_α eine Abbildung zwischen Pseudokomplexen ist.

$$\begin{aligned} \nabla_s \cup_\alpha &= i\nabla_A \boxed{pi} m_A p \hat{\otimes} p \\ &\quad + jt^{-1}u \boxed{pi} m_A p \hat{\otimes} p \\ &\quad + j\nabla_{B[-1]} \boxed{qj} t^{-1}m_B (tq \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2)p + ((1-\alpha)u_1 + \alpha u_2)p \hat{\otimes} tq) \\ &= i\nabla_A m_A p \hat{\otimes} p + jt^{-1}u m_A p \hat{\otimes} p \\ &\quad - jt^{-1}\nabla_B m_B tq \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2)p \\ &\quad - jt^{-1}\nabla_B m_B ((1-\alpha)u_1 + \alpha u_2)p \hat{\otimes} tq \end{aligned}$$

beziehungsweise:

$$\begin{aligned}
\cup_\alpha \nabla_s^{\hat{\otimes} 2} &= \cup_\alpha (\nabla_s \hat{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \hat{\otimes} \nabla_s) = \cup_\alpha (\nabla_s \hat{\otimes} (ip + jq) + (ip + jq) \hat{\otimes} \nabla_s) \\
&= i \, m_A \boxed{(p \hat{\otimes} p)(i \hat{\otimes} i)} (\nabla_A p \hat{\otimes} p + p \hat{\otimes} \nabla_A p) \\
&\quad + jt^{-1} m_B \, t \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) \boxed{q \hat{\otimes} p}(j \hat{\otimes} i) \left((t^{-1} up + \nabla_{B[-1]} q) \hat{\otimes} p + q \hat{\otimes} \nabla_A p \right) \\
&\quad + jt^{-1} m_B ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) \hat{\otimes} t \boxed{p \hat{\otimes} q}(i \hat{\otimes} j) \left(\nabla_A p \hat{\otimes} q + p \hat{\otimes} (t^{-1} up + \nabla_{B[-1]} q) \right) \\
&= i \, m_A (\nabla_A \hat{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \hat{\otimes} \nabla_A) p \hat{\otimes} p \\
&\quad + jt^{-1} m_B (t \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2)) \cdot (t^{-1} up \hat{\otimes} p) \\
&\quad + jt^{-1} m_B (((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) \hat{\otimes} t) \cdot (p \hat{\otimes} t^{-1} up) \\
&\quad + jt^{-1} m_B \, t \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) (\nabla_{B[-1]} \hat{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \hat{\otimes} \nabla_A) q \hat{\otimes} p \\
&\quad + jt^{-1} m_B ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) \hat{\otimes} t (\nabla_A \hat{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \hat{\otimes} \nabla_{B[-1]}) p \hat{\otimes} q
\end{aligned}$$

Wir vergleichen nun separat die Terme, die in $p \hat{\otimes} p$, $p \hat{\otimes} q$ und $q \hat{\otimes} p$ enden.

- Die Terme in $p \hat{\otimes} p$: Die Terme $i \nabla_A m_A p \hat{\otimes} p$ und $i \, m_A \nabla_A^{\hat{\otimes} 2} p \hat{\otimes} p$ stimmen überein, da m_A verträglich mit den Pseudodifferentialen ist. Allgemein gilt für u der Form $const.(u_1 - u_2)$ die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
&jt^{-1} m_B \left\{ u \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) + ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) \hat{\otimes} u \right\} p \hat{\otimes} p \\
(93) \quad &= const. \, jt^{-1} m_B \left\{ (u_1 - u_2) \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) + ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) \hat{\otimes} (u_1 - u_2) \right\} p \hat{\otimes} p \\
&= const. \, jt^{-1} m_B \{ u_1 \hat{\otimes} u_1 - u_2 \hat{\otimes} u_2 \} p \hat{\otimes} p \\
&= jt^{-1} u \, m_A p \hat{\otimes} p.
\end{aligned}$$

Wir haben dabei benutzt, daß die u_i 's verträglich mit den Multiplikativstrukturen sind: $u_i \, m_A = m_B \, u_i^{\hat{\otimes} 2} = m_B \, u_i \hat{\otimes} u_i$, für $i = 1, 2$.

- Die Terme mit den Endungen $p \hat{\otimes} q$ sind gleich: Da u_i und t Pseudomorphismen sind, superkommutiert $u_i \hat{\otimes} t$ mit $\nabla \hat{\otimes} \mathbf{1}$ und $\mathbf{1} \hat{\otimes} \nabla$ im gemischten Sinne. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
&jt^{-1} m_B ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) \hat{\otimes} t (\nabla_A \hat{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \hat{\otimes} \nabla_{B[-1]}) p \hat{\otimes} q \\
(94) \quad &= -jt^{-1} m_B (\nabla_B \hat{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \hat{\otimes} \nabla_B) ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) \hat{\otimes} t p \hat{\otimes} q \\
&= -jt^{-1} \nabla_B m_B ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) p \hat{\otimes} tq
\end{aligned}$$

- Die Terme mit $q \hat{\otimes} p$ werden analog behandelt: Die Operatoren $t \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2)$ und $\nabla \hat{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \hat{\otimes} \nabla$ superkommutieren, d.h. sie antikommutieren.

Wir haben bereits gezeigt, daß die Morphismen \cup_α Pseudomorphismen sind. Wir werden nun zeigen, daß sich zwei solche Abbildungen um einen gemischten Superkommutator unterscheiden. Die Differenz zweier \cup -Morphismen ist:

$$\cup_\alpha - \cup_\beta = (\alpha - \beta) \, jt^{-1} m_B (tq \hat{\otimes} up - up \hat{\otimes} tq)$$

Wir haben eine eindeutige natürliche Art, eine Abbildung vom Grad -1 von $s(u) \hat{\otimes} s(u)$ nach $s(u)$ zu schreiben, indem wir die Verschiebung im zweiten Summanden $B[-1]$ ausnutzen:

$$K := jt^{-1} m_B \, tq \hat{\otimes} tq$$

Wir berechnen den entsprechenden Superkommutator:

$$\begin{aligned}
[\nabla, K] &= \nabla K + K \nabla = \nabla_s K + K \nabla_s^{\hat{\otimes} 2} \\
&= j \nabla_{B[-1]} \boxed{qj} \, t^{-1} m_B \, tq \hat{\otimes} tq \\
&\quad + jt^{-1} m_B \, t \hat{\otimes} t \boxed{(q \hat{\otimes} q)(j \hat{\otimes} j)} \left\{ (t^{-1} up + \nabla_{B[-1]} q) \hat{\otimes} q + q \hat{\otimes} (t^{-1} up + \nabla_{B[-1]} q) \right\} \\
&= -jt^{-1} m_B \nabla_B^{\hat{\otimes} 2} \, tq \hat{\otimes} tq \\
&\quad + jt^{-1} m_B \{ -up \hat{\otimes} tq + tq \hat{\otimes} up - t \nabla_{B[-1]} q \hat{\otimes} tq + tq \hat{\otimes} t \nabla_{B[-1]} q \} \\
&= jt^{-1} m_B \{ -up \hat{\otimes} tq + tq \hat{\otimes} up \}
\end{aligned}$$

Wir haben bereits gezeigt: $\cup_\alpha - \cup_\beta = (\alpha - \beta)[\nabla, K]$.

Wir untersuchen nun die Assoziativität der Abbildung \cup_α . Dafür muß der Abstand zwischen $\cup_\alpha(\cup_\alpha \hat{\otimes} \mathbf{1})$ und $\cup_\alpha(\mathbf{1} \hat{\otimes} \cup_\alpha)$ berechnet werden. Wir entwickeln diese Terme explizit:

$$\begin{aligned}
 \cup_\alpha(\cup_\alpha \hat{\otimes} \mathbf{1}) &= \cup_\alpha(\cup_\alpha \hat{\otimes} (ip + jq)) \\
 &= i m_A \boxed{(p \hat{\otimes} p)(i \hat{\otimes} i)} (m_A p \hat{\otimes} p) \hat{\otimes} p \\
 &\quad + jt^{-1} m_B t \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) \boxed{(q \hat{\otimes} p)(j \hat{\otimes} i)} \left\{ t^{-1} m_B (tq \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) p \right. \\
 &\quad \left. + ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) p \hat{\otimes} tq) \right\} \hat{\otimes} p \\
 &\quad + jt^{-1} m_B ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) \hat{\otimes} t \boxed{(p \hat{\otimes} q)(i \hat{\otimes} j)} (m_A p \hat{\otimes} p) \hat{\otimes} q \\
 (95) \quad &= i m_A (m_A \hat{\otimes} \mathbf{1}) p \hat{\otimes} p \hat{\otimes} p \\
 (96) \quad &\quad + jt^{-1} m_B (m_B \hat{\otimes} \mathbf{1}) \left\{ tq \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) p \right. \\
 &\quad \left. + ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) p \hat{\otimes} tq \right\} \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) p \} \\
 (97) \quad &\quad + jt^{-1} m_B (m_B \hat{\otimes} \mathbf{1}) \left\{ (1 - \alpha) u_1 p \hat{\otimes} u_1 p + \alpha u_2 p \hat{\otimes} u_2 p \right\} \hat{\otimes} tq
 \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
 \cup_\alpha(\mathbf{1} \hat{\otimes} \cup_\alpha) &= \cup_\alpha((ip + jq) \hat{\otimes} \cup_\alpha) \\
 &= i m_A \boxed{(p \hat{\otimes} p)(i \hat{\otimes} i)} p \hat{\otimes} (m_A p \hat{\otimes} p) \\
 &\quad + jt^{-1} m_B t \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) \boxed{(q \hat{\otimes} p)(j \hat{\otimes} i)} q \hat{\otimes} (m_A p \hat{\otimes} p) \\
 &\quad + jt^{-1} m_B ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) \hat{\otimes} t \boxed{(p \hat{\otimes} q)(i \hat{\otimes} j)} p \hat{\otimes} t^{-1} m_B \left(tq \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) p \right. \\
 &\quad \left. + ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) p \hat{\otimes} tq \right) \\
 (98) \quad &= i m_A (\mathbf{1} \hat{\otimes} m_A) p \hat{\otimes} p \hat{\otimes} p \\
 (99) \quad &\quad + jt^{-1} m_B (m_B \hat{\otimes} \mathbf{1}) \left\{ tq \hat{\otimes} (\alpha u_1 \hat{\otimes} u_1 + (1 - \alpha) u_2 \hat{\otimes} u_2) (p \hat{\otimes} p) \right\} \\
 (100) \quad &\quad + jt^{-1} m_B (m_B \hat{\otimes} \mathbf{1}) ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) p \hat{\otimes} \left(tq \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) p \right. \\
 &\quad \left. + ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) p \hat{\otimes} tq \right)
 \end{aligned}$$

Die Ausdrücke (95) und (98) stimmen Überein, da m_A assoziativ ist. (96) und (97) ergeben zusammen:

$$jt^{-1} m_B (m_B \hat{\otimes} \mathbf{1}) \left\{ \begin{array}{l} tq \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) p \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) p \\ + ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) p \hat{\otimes} tq \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) p \\ + ((1 - \alpha) u_1 \hat{\otimes} u_1 \mathbf{1} + \alpha u_2 \hat{\otimes} u_2 \mathbf{1}) p \hat{\otimes} p \hat{\otimes} tq \end{array} \right\}$$

Wir vergleichen diesen Ausdruck mit dem folgenden, der die direkte Bearbeitung der Summe von (99) und (100) ist:

$$jt^{-1} m_B (\mathbf{1} \hat{\otimes} m_B \hat{\otimes}) \left\{ \begin{array}{l} (\alpha \mathbf{1} \hat{\otimes} u_1 \hat{\otimes} u_1 + (1 - \alpha) \mathbf{1} \hat{\otimes} u_2 \hat{\otimes} u_2) tq \hat{\otimes} p \hat{\otimes} p \\ + ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) p \hat{\otimes} tq \hat{\otimes} (\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) p \\ + ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) p \hat{\otimes} ((1 - \alpha) u_1 + \alpha u_2) p \hat{\otimes} tq \end{array} \right\}$$

Unter Verwendung der Tatsache, daß m_B multiplikativ ist: $m_B(m_B \hat{\otimes} \mathbf{1} - \mathbf{1} \hat{\otimes} m_B) = 0$, können wir die Differenz berechnen:

$$(101) \quad \cup_\alpha(\cup_\alpha \hat{\otimes} \mathbf{1} - \mathbf{1} \hat{\otimes} \cup_\alpha) = \alpha(1 - \alpha) (up \hat{\otimes} up \hat{\otimes} tq - tq \hat{\otimes} up \hat{\otimes} up)$$

Diese Differenz verschwindet insbesondere für die Werte $\alpha = 0, 1$. □

6. Eine Variante des Deligne-Komplexes. Motivation

Wir können die Resultate des letzten Abschnittes für den speziellen Fall der Deligne-Kohomologie anwenden. Sie ist durch die Kohomologie des einfachen Komplexes der Abbildung $u = u_1 - u_2 : A(p) \oplus F^p A \rightarrow A$ definiert. Dabei sind $u_1 : A(p) \rightarrow A$ und $u_2 : F^p A \rightarrow A$ die Inklusionen. Sie sind verträglich mit den vorliegenden multiplikativen und differenzialen Strukturen. Die Abbildung \cup_α induziert die Multiplikation in der Deligne-Kohomologie.

Wir haben diese Struktur mit dem Ziel isoliert, um einen allgemeinen funktoriellen Rahmen zu schaffen, damit der Deligne-Kohomologie berechnende Komplex mit einem Komplex zu ersetzen ist, der die komplexe Konjugation

- nicht *a priori* in der Bildung des Komplexes
- sondern *a posteriori* als Aktion durch Konjugation auf diesem Komplex

involviert. Dieser ist ein wichtiger Schritt, der im Bezug zum Formalismus der Transgressionsformeln das Auftreten der (formalen) Adjugierten zu den Operatoren ∇ und ∇^c vermeidet. Wir werden auf eine natürliche Art und Weise, den Deligne–Kohomologie berechnenden Komplex in Verbindung zu dem Simpel–Komplex der natürlichen Abbildung $F^p A \oplus \overline{F^p} A \rightarrow A$ bringen.

6.1. Der Komplex $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^*(A, p)$. Wir vergleichen die Simpel–Komplexe zu den Abbildungen, welche als Differenz der direkten Summanden des Definitionsbereichs entstehen:

$$F^p A \oplus A(p) \rightarrow A \quad \text{und} \quad F^p A \oplus \overline{F^p} A \rightarrow A$$

Die erste Abbildung liefert die reelle Deligne–Kohomologie. Wir widmen unsere Aufmerksamkeit der zweiten Abbildung.

DEFINITION 6.1. $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^*(A, p)$ ist der \hat{s} –Komplex, der zum einfachen Komplex s der Abbildung $F^p A \oplus \overline{F^p} A \rightarrow A$ unter Benutzung des Oktogon–Diagramms zugeordnet wird.

Wir vergleichen also die Komplexe:

$$\mathfrak{D}^*(A, p) = \begin{array}{c} \diamond (p) \\ \downarrow \\ \diamond (p-1) \end{array} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^*(A, p) := \hat{s} \left(F^p \oplus \overline{F^p} \xrightarrow{\text{Differenz}} A \right) = \begin{array}{c} \diamond \\ \downarrow \\ \diamond \end{array}$$

$\mathfrak{D}^*(A, p)$ erscheint als der $(-1)^p$ –Eigenraum in $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^*(A, p)$ bezüglich einer komplexen Konjugation, die wir im Abschnitt 10 einführen. Wir konstruieren eine (gemischte) HODGE–Struktur, die auf der üblichen HODGE–Struktur des DOLBEAULT–Komplexes beruht, so daß die reelle DELIGNE–Kohomologie der reellen oder imaginären Anteil darin ist.

Die Bildung von $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^*(A, p)$ ist natürlicher als die Bildung von $\mathfrak{D}^*(A, p)$ auch im Bezug auf die funktorielle Übertragung der Indexverschiebung, welche durch die (mit Differentialen und Multiplikationen verträgliche,) kanonische Inklusion von Komplexen $F^p \rightarrow F^{p-1}$ entsteht: Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} F^p \\ \oplus \\ \overline{F^p} \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} \text{Inkl.} & \cdot \\ \cdot & \text{Inkl.} \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} F^{p-1} \\ \oplus \\ \overline{F^{p-1}} \end{bmatrix} \\ \text{Differenz} \downarrow & & \downarrow \text{Differenz} \\ A & \xlongequal{\quad\quad\quad} & A \end{array}$$

induziert funktoriell eine Abbildung zwischen den \hat{s} –Komplexen zu den senkrechten Pfeilen: $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^*(A, p) \rightarrow \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^*(A, p-1)$, die wir als “Shift–Operator” bezeichnen und im Abschnitt 9 näher untersuchen. Eine ähnliche Abbildung $\mathfrak{D}^*(A, p) \rightarrow \mathfrak{D}^*(A, p-1)$ entsteht aus dem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} F^p \\ \oplus \\ A(p) \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2\pi i \cdot \text{Inkl.} & \cdot \\ \cdot & \text{Inkl.} \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} F^{p-1} \\ \oplus \\ A(p-1) \end{bmatrix} \\ \text{Differenz} \downarrow & & \downarrow \text{Differenz} \\ A & \xrightarrow{(2\pi i) \cdot} & A \end{array}$$

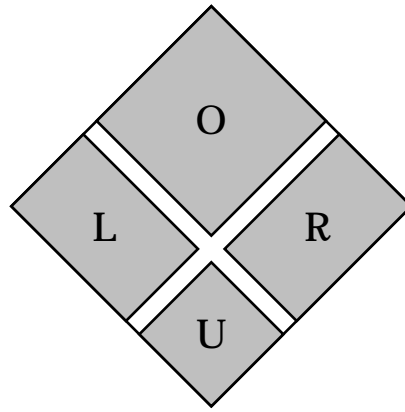
Sie benötigt jedoch in ihrer Bildung die richtige Aufnahme der Periode $2\pi i$.

Wir werden die weiteren Berechnungen ausschließlich im Komplex $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^*(A, p)$ führen. Er ist elastischer und führt in eine andere Richtung eine analoge Bildung der DELIGNE–Kohomologie für Unterringe von \mathbb{C} .

Der Shift–Operator ist nilpotent und kommutiert mit dem Differential des trunkierten DOLBEAULT–Komplexes. Wir bekommen eine Zerlegung der Differentialformen dieses Komplexes durch eine weite Analogie zur LEFSCHETZ–Zerlegung in der HODGE–Theorie.

7. Die explizite Struktur des Komplexes $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^*(A, p)$

Dieser Abschnitt ist eine Übertragung der Berechnung von Burgos [Bu] für $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^*(A, p)$. Wir geben in diesem Fall einen Ausdruck für die multiplikative Struktur des Komplexes $\hat{s}_{\mathbb{C}} = \hat{s}_{\mathbb{C}}(p)$, eine kürzere Notation für $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^*(A, p)$,



$$\begin{aligned}
 \text{oben} &::= O := F^p \cap \overline{F}^p \\
 \text{links} &::= L := F^p \cap \overline{F}^{\bullet < p} \\
 \text{rechts} &::= R := F^{\bullet < p} \cap \overline{F}^p \\
 \text{unten} &::= U := F^{\bullet < p} \cap \overline{F}^{\bullet < p} .
 \end{aligned}$$

ABBILDUNG 3. Schematische Zerlegung des Dolbeault-Komplexes

wenn unmißverständlich, der homotop zum einfachen Komplex $s_{\mathbb{C}}$ der Abbildung $u := u_1 - u_2 : F^p A \oplus \overline{F}^p A \rightarrow A$ ist. Dann ist

$$(102) \quad s_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} F^p A \oplus \overline{F}^p A \\ \oplus \\ A[-1] \end{bmatrix}$$

und die Multiplikation zum Parameter α ist:

$$(103) \quad (f_1, f_2; \omega) \cdot (g_1, g_2; \eta) = (f_1 g_1, f_2 g_2; \quad \omega \cdot (\alpha g_1 + (1 - \alpha) g_2) \\ + \epsilon(f)((1 - \alpha) f_1 + \alpha f_2) \cdot \eta)$$

7.1. Die Zerlegung des DOLBEAULT-KOMPLEXES. Wir spalten schematisch den Dolbeault-Komplex A in kleinere Atome, um geeignet die Wechselwirkung der Anteile $F^p A$, $\overline{F}^p A$ und A zu untersuchen, und betrachten dabei die Abbildung 3.

Die Großbuchstaben O , L , R , U stehen respektive für den oberen, den linken, den rechten, den unteren Bereich in der Zerlegung des Dolbeault-Komplexes. Entsprechen legen wir die Notation für die notwendigen Zerlegungen fest:

$$\begin{array}{ll}
 O = \text{oben} & \\
 L = \text{links} & \\
 R = \text{rechts} & \\
 U = \text{unten} &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 s_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} F^p A \oplus \overline{F}^p A \\ \oplus \\ A[-1] \\ \text{Coker } u[-1] \end{bmatrix} \\
 \hat{s}_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \oplus \\ \text{Ker } u \end{bmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} (\text{links} \oplus \text{oben}) \oplus (\text{rechts} \oplus \text{oben}) \\ \oplus \\ (\text{oben} \oplus \text{links} \oplus \text{rechts} \oplus \text{unten})[-1] \\ \text{unten}[-1] \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \oplus \\ \text{oben} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

7.2. Oberes Oktogon-Diagramm. Das Diagramm (86) nimmt nun eine spezielle Gestalt an. Diese ist in der Abbildung 4 an der Seite 107 skizziert.

Die Morphismen in diesem Diagramm sind:

$$\iota = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \end{bmatrix} \quad
 u_0 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} \quad
 u_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad
 \pi = [\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 1]$$

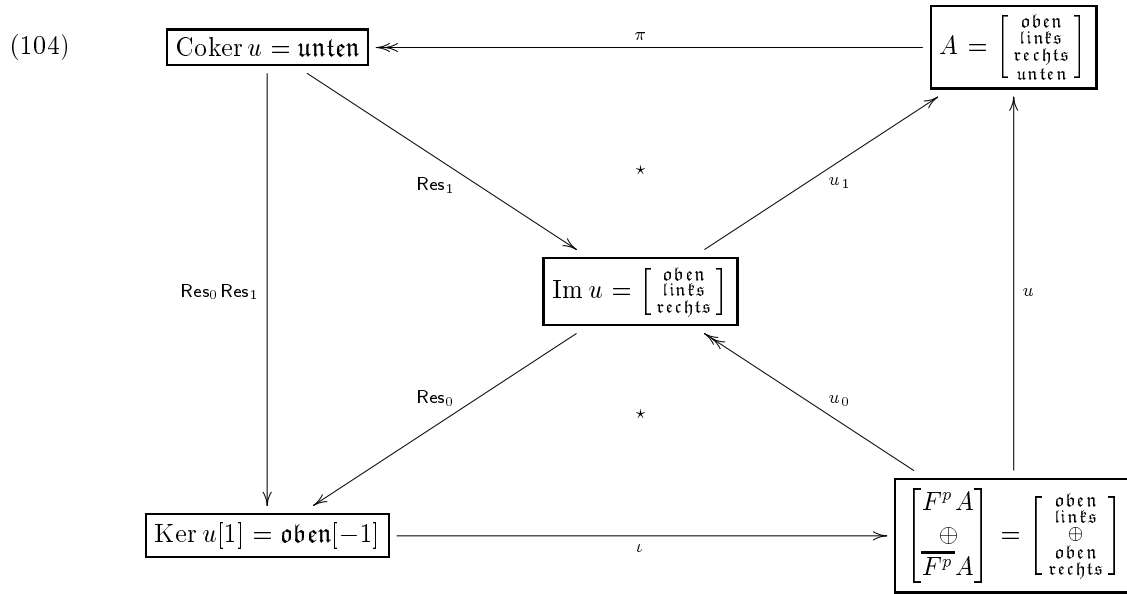


ABBILDUNG 4. Die obere Hälfte des Oktogon-Diagramms, entsprechend der kanonischen Faktorisierung durch das Bild der rechts stehenden senkrechten Abbildung.

7.3. Schnitte und Retrakte. Die Schnitte und Retrakte in dem oberen Oktogon-Diagramm sind:

$$\begin{aligned}
 \text{Im } u & \equiv \begin{bmatrix} \text{oben} \\ \text{links} \\ \text{rechts} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ -\frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} = \sigma_0} \begin{bmatrix} \text{oben} \\ \text{links} \\ \oplus \\ \text{oben} \\ \text{rechts} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} F^p A \\ \oplus \\ F^p A \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} F^p A \\ \oplus \\ F^p A \end{bmatrix} & \equiv \begin{bmatrix} \text{oben} \\ \text{links} \\ \oplus \\ \text{oben} \\ \text{rechts} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot \end{bmatrix} = \tau_0} [\text{oben}] \equiv \text{Ker } u \\
 A & \equiv \begin{bmatrix} \text{oben} \\ \text{links} \\ \text{rechts} \\ \text{unten} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \tau_1} \begin{bmatrix} \text{oben} \\ \text{links} \\ \text{rechts} \end{bmatrix} \equiv \text{Im } u \\
 \text{Coker } u & \equiv [\text{unten}] \xrightarrow{\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} = \sigma_1} \begin{bmatrix} \text{oben} \\ \text{links} \\ \text{rechts} \\ \text{unten} \end{bmatrix} \equiv A
 \end{aligned}$$

7.4. Die Residuen. Wir berechnen nun die Residuen Res_0 und Res_1 bzw. ihre Verknüpfung. Die Unverträglichkeit der Schnitte und Retrakte mit den Differentialen der Komplexe in der Abbildung (4) ist dabei zu untersuchen. Für die Beschreibung der notwendigen Differentialen bezüglich der gegebenen Zerlegungen brauchen wir die folgenden Notationen:

$$\partial_{un,li} : \text{unten} \rightarrow \text{links}$$

$$\partial_{re,ob} : \text{rechts} \rightarrow \text{oben}$$

$$\bar{\partial}_{un,re} : \text{unten} \rightarrow \text{rechts}$$

$$\bar{\partial}_{li,ob} : \text{links} \rightarrow \text{oben}$$

$$\partial_{un,li} := \mathbf{Proj}_{\text{links}} \partial \Big|_{\text{unten}}$$

$$\partial_{re,ob} := \mathbf{Proj}_{\text{oben}} \partial \Big|_{\text{rechts}}$$

$$\bar{\partial}_{un,re} := \mathbf{Proj}_{\text{rechts}} \bar{\partial} \Big|_{\text{unten}}$$

$$\bar{\partial}_{li,ob} := \mathbf{Proj}_{\text{oben}} \bar{\partial} \Big|_{\text{links}}$$

Nun beschreiben wir die Differentiale der Komplexe $\text{Im } u$, A und $F^p A \oplus \overline{F}^p A$ bezüglich der bereits eingeführten Zerlegungen dieser Komplexe:

- Das Differential auf $\text{Im } u$ ist:

$$\begin{bmatrix} d & \overline{\partial}_{li,ob} & \partial_{re,ob} \\ \cdot & d - \overline{\partial}_{li,ob} & \cdot \\ \cdot & \cdot & d - \partial_{re,ob} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \text{oben} \\ \text{links} \\ \text{rechts} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \text{oben} \\ \text{links} \\ \text{rechts} \end{bmatrix}$$

- Das Differential auf $F^p A \oplus \overline{F}^p A$ ist in Matrixform gegeben durch:

$$\begin{bmatrix} d & \overline{\partial}_{li,ob} & & \\ \cdot & d - \overline{\partial}_{li,ob} & & \\ & & d & \partial_{re,ob} \\ & & \cdot & d - \partial_{re,ob} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \text{oben} \\ \text{links} \\ \oplus \\ \text{oben} \\ \text{rechts} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \text{oben} \\ \text{links} \\ \oplus \\ \text{oben} \\ \text{rechts} \end{bmatrix}$$

- Das Differential auf A ist:

$$\begin{bmatrix} d & \overline{\partial}_{li,ob} & \partial_{re,ob} & \cdot \\ \cdot & d - \overline{\partial}_{li,ob} & \cdot & \partial_{un,li} \\ & \cdot & d - \partial_{re,ob} & \overline{\partial}_{un,re} \\ & & \cdot & d - \partial_{un,li} \\ & & & -\overline{\partial}_{un,re} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \text{oben} \\ \text{links} \\ \text{rechts} \\ \text{unten} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \text{oben} \\ \text{links} \\ \text{rechts} \\ \text{unten} \end{bmatrix}$$

7.5. Das Residuum Res_1 . Dieses Residuum kann z.B. durch die Relation $u_1 \text{Res}_1 = [\sigma_1, \nabla]$ eindeutig bestimmt werden. Die entsprechende Rechnung ist einfach:

$$\begin{aligned} [\sigma_1, \nabla] &= \sigma_1 \nabla_{\text{Coker } u} - \nabla_A \sigma_1 \\ &= \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} [d - \partial_{un,li} - \overline{\partial}_{un,re}] - \begin{bmatrix} d & \overline{\partial}_{li,ob} & \partial_{re,ob} & \cdot \\ \cdot & d - \overline{\partial}_{li,ob} & \cdot & \partial_{un,li} \\ & \cdot & d - \partial_{re,ob} & \overline{\partial}_{un,re} \\ & & \cdot & d - \partial_{un,li} \\ & & & -\overline{\partial}_{un,re} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cdot \\ -\partial_{un,li} \\ -\overline{\partial}_{un,re} \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ -\partial_{un,li} \\ -\overline{\partial}_{un,re} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

und daraus schließen wir

$$(105) \quad \text{Res}_1 = \begin{bmatrix} \cdot \\ -\partial_{un,li} \\ -\overline{\partial}_{un,re} \end{bmatrix}.$$

7.6. Das Residuum Res_0 . Für seine Berechnung benutzen wir die bestimmende Relation: $\iota \text{Res}_0 = [\sigma_0, \nabla]$:

$$\begin{aligned} [\sigma_0, \nabla] &= \sigma_0 \nabla_{\text{Im } u} - \nabla_{F^p A \oplus \overline{F}^p A} \sigma_0 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ -\frac{1}{2} & \cdot & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & \overline{\partial}_{li,ob} & \partial_{re,ob} \\ \cdot & d - \overline{\partial}_{li,ob} & \cdot \\ \cdot & \cdot & d - \partial_{re,ob} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d & \overline{\partial}_{li,ob} \\ \cdot & d - \overline{\partial}_{li,ob} & \cdot \\ \cdot & \partial_{re,ob} & d - \partial_{re,ob} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ -\frac{1}{2} & \cdot & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cdot & -\frac{1}{2}\overline{\partial}_{li,ob} & \frac{1}{2}\partial_{re,ob} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{2}\overline{\partial}_{li,ob} & \frac{1}{2}\partial_{re,ob} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & -\frac{1}{2}\overline{\partial}_{li,ob} & \frac{1}{2}\partial_{re,ob} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$(106) \quad \text{Res}_0 = \begin{bmatrix} \cdot & -\frac{1}{2}\bar{\partial}_{li,ob} & \frac{1}{2}\partial_{re,ob} \end{bmatrix}$$

7.7. Die Verknüpfung. Sie ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \text{Res}_0 \text{Res}_1 &= \begin{bmatrix} \cdot & -\frac{1}{2}\bar{\partial}_{li,ob} & \frac{1}{2}\partial_{re,ob} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ -\partial_{un,li} \\ -\bar{\partial}_{un,re} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \bar{\partial}_{li,ob} \partial_{un,li} - \frac{1}{2} \partial_{re,ob} \bar{\partial}_{un,re} \\ &= (\bar{\partial}\partial)_{un,ob} = -(\partial\bar{\partial})_{un,ob} . \end{aligned}$$

Diese Abbildung bildet den Bigrad $(p-1, p-1)$ des unteren Anteils in den Bigrad (p, p) des oberen Anteils durch $\bar{\partial}\partial = -\partial\bar{\partial}$ (und annulliert die anderen Bigrade des unteren Anteils).

Sie ist eine Komplexabbildung: **unten** \rightarrow **oben**.

8. Die Übertragung der multiplikativen Struktur

Die Morphismen ϕ und ψ aus dem Satz 4.2 sind gegeben durch:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ \partial_{un,li} & \cdot \\ \cdot & 1 \\ -\bar{\partial}_{un,re} & \cdot \\ \hline \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 1 & \end{bmatrix} & \\ \phi := & & \\ & \begin{array}{c} \leftarrow \begin{bmatrix} \text{unten}[-1] \\ \oplus \\ \text{oben} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \text{oben} \\ \text{links} \\ \text{oben} \\ \text{rechts} \\ \oplus \\ \text{oben} \\ \text{links} \\ \text{rechts} \\ \text{unten} \end{bmatrix} \end{array} & \\ \psi := & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot \end{bmatrix} & \end{array}$$

Wollen wir präzisieren, daß der einfache Komplex zu dem Morphismus $F^p \oplus \bar{F}^p \rightarrow A$ gebildet wird, so notieren wir dies mit $\hat{s}_{\mathbb{C}}(p)$ und entsprechend für $\hat{s}_{\mathbb{C}}(q)$. Es gilt:

$$\phi \begin{bmatrix} u \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (o + \partial_{un \ li} u) \oplus (o - \bar{\partial}_{un \ re} u) \\ u \end{bmatrix}$$

und für $x := \begin{bmatrix} u_1 \\ o_1 \end{bmatrix} \in \hat{s}_{\mathbb{C}}(p)$, $y := \begin{bmatrix} u_2 \\ o_2 \end{bmatrix} \in \hat{s}_{\mathbb{C}}(q)$ gilt dann

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (o_1 + \partial_{un \ li} u_1) \oplus (o_1 - \bar{\partial}_{un \ re} u_1) \\ u_1 \end{bmatrix} \bullet_{\alpha} \begin{bmatrix} (o_2 + \partial_{un \ li} u_2) \oplus (o_2 - \bar{\partial}_{un \ re} u_2) \\ u_2 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} (o_1 + \partial_{un \ li} u_1) \wedge (o_2 + \partial_{un \ li} u_2) \oplus (o_1 - \bar{\partial}_{un \ re} u_1) \wedge (o_2 - \bar{\partial}_{un \ re} u_2) \\ u_1 \wedge (\alpha(o_2 + \partial_{un \ li} u_2) + (1-\alpha)(o_2 - \bar{\partial}_{un \ re} u_2)) \\ \quad + \text{sign}_1((1-\alpha)(o_1 + \partial_{un \ li} u_1) + \alpha(o_1 - \bar{\partial}_{un \ re} u_1)) \wedge u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und nun muß ψ auf dem letzten Ausdruck angewandt werden, um die Multiplikation auf $\hat{s}_{\mathbb{C}}$ zu erklären. Dafür müssen die oben, links, rechts und unten stehenden Anteile bzgl. $p+q$ isoliert werden. Dies führt zu einer Fallunterscheidung:

- Beide Faktoren unten: $x = u_1$, $y = u_2$:

$$u_1 \bullet_{\alpha} u_2 = u_1 \wedge (\alpha \partial_{un \ li} u_2 - (1-\alpha) \bar{\partial}_{un \ re} u_2) + \text{sign}_1((1-\alpha) \partial_{un \ li} u_1 - \alpha \bar{\partial}_{un \ re} u_1) \wedge u_2$$

Unter Verwendung der Notation von BURGOS:

$$r_p(x) := \begin{cases} \partial_{un \ li} x - \bar{\partial}_{un \ re} x & \text{falls } x \in \text{unten}[-1] \\ x & \text{falls } x \in \text{oben} \end{cases}$$

erreichen wir für den speziellen Wert von $\alpha = \frac{1}{2}$ eine ähnliche Formel:

$$u_1 \bullet u_2 = \frac{1}{2} [u_1 \wedge r_q(u_2) + \text{sign}_1 r_p(u_1) \wedge u_2] .$$

(Der Unterschied besteht in der Anwesenheit des Faktors $\frac{1}{2}$.)

- $x \in \text{unten}(p)$ im Grad $n < 2p$; $y \in \text{oben}(q)$ im Grad $m \geq 2q$. Wir unterscheiden zwei Unterfälle:
 - ★ $n + m < 2(p + q)$: Dann kann kein oberer Anteil entstehen, und im unteren Anteil befindet sich die Projektion von $x \wedge y$. Nur dieser Unterfall kommt in unseren weiteren Anwendungen vor, und zwar für den Fall $m = 2q$, n beliebig.
 - ★ $n + m \geq 2(p + q)$: Dann entsteht kein unterer Anteil und die Formel für den oberen Anteil ist:

$$\frac{1}{2} \text{Proj}_{\text{oben}(p+q)} \{ (\partial_{un\ li} x - \bar{\partial}_{un\ re} x) \wedge y \} - \frac{1}{2} \bar{\partial}_{li\ ob} \text{Proj}_{\text{links}(p+q)} (x \wedge y) + \frac{1}{2} \partial_{re\ ob} \text{Proj}_{\text{rechts}(p+q)} (x \wedge y)$$

- Der triviale Fall: beide Faktoren in den oberen Anteilen: Dann ist $x \bullet y = x \wedge y$.

9. Der Shift-Operator

Die kanonische Abbildung:

$$(107) \quad \begin{bmatrix} F^p \oplus \bar{F}^p \\ \oplus \\ A \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} F^{p-1} \oplus \bar{F}^{p-1} \\ \oplus \\ A \end{bmatrix}$$

induziert eine für uns wichtige Abbildung

$$sh : \hat{s}_{\mathbb{C}}(p) \longrightarrow \hat{s}_{\mathbb{C}}(p-1) ,$$

die in diesem Abschnitt berechnet wird. Dafür benötigen wir für ein Element $u \in \text{unten}(p)$ eine geeignete Zerlegung

$$\begin{bmatrix} u_{p-1\ p-1} \\ u_{li} \\ u_{re} \\ u_{unten} \end{bmatrix}$$

bezüglich der Zerlegung des DOLBEAULT-Komplexes zu $(p-1)$. In dem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\hat{s}_{\mathbb{C}}(p) := \begin{bmatrix} \text{Coker } u(p)[-1] \\ \oplus \\ \text{Ker } u(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{unten}(p)[-1] \\ \oplus \\ \text{oben}(p) \end{bmatrix}} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} F^p \oplus \bar{F}^p \\ \oplus \\ A \end{bmatrix} \\ & & \downarrow \\ \boxed{\hat{s}_{\mathbb{C}}(p-1) := \begin{bmatrix} \text{Coker } u(p-1)[-1] \\ \oplus \\ \text{Ker } u(p-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{unten}(p-1)[-1] \\ \oplus \\ \text{oben}(p-1) \end{bmatrix}} & \longleftarrow & \begin{bmatrix} F^{p-1} \oplus \bar{F}^{p-1} \\ \oplus \\ A \end{bmatrix} \end{array}$$

wird das Element $\begin{bmatrix} u \\ o \end{bmatrix}$ wie folgt abgebildet:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} u \\ o \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} o + \partial u_{li} + \partial u_{p-1\ p-1} \oplus o - \bar{\partial} u_{re} - \bar{\partial}_{p-1\ p-1} \\ u \end{bmatrix} \\ & & \downarrow \\ & & \begin{bmatrix} o + \partial u_{li} + \partial u_{p-1\ p-1} \oplus o - \bar{\partial} u_{re} - \bar{\partial}_{p-1\ p-1} \\ u_{p-1\ p-1} \\ u_{li} \\ u_{re} \\ u_{unten} \end{bmatrix} \\ & \longleftarrow & \begin{bmatrix} o + \frac{1}{2}(\partial - \bar{\partial})u_{p-1\ p-1} - \frac{1}{2}\bar{\partial}u_{li}^* + \frac{1}{2}\partial u_{re}^* \end{bmatrix} \end{array}$$

Dabei sind u_{li}^* und u_{re}^* die Anteile aus u_{li} bzw. u_{re} die maximalen Gesamtgrad $2(p-1)-1$ besitzen, so daß $\bar{\partial}u_{li}^*$ und ∂u_{re}^* in Bigrad (p, p) landen.

10. Die komplexe Konjugation

Wir benutzen in diesem Abschnitt das Symbol σ für die übliche komplexe Konjugation und betrachten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 \begin{bmatrix} F^p \\ \oplus \\ \overline{F}^p \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} \text{lnkl.} & \cdot \\ \cdot & \text{lnkl.} \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} F^{p-1} \\ \oplus \\ \overline{F}^{p-1} \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} \cdot & \sigma \\ \sigma & \cdot \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} F^{p-1} \\ \oplus \\ \overline{F}^{p-1} \end{bmatrix} \\
 \searrow \begin{bmatrix} \cdot & \sigma \\ \sigma & \cdot \end{bmatrix} & & \downarrow \begin{bmatrix} \text{lnkl.} & \cdot \\ \cdot & \text{lnkl.} \end{bmatrix} & & \downarrow \begin{bmatrix} \cdot & \sigma \\ \sigma & \cdot \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} F^p \\ \oplus \\ \overline{F}^p \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} \text{lnkl.} & \cdot \\ \cdot & \text{lnkl.} \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} F^{p-1} \\ \oplus \\ \overline{F}^{p-1} \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} \cdot & \sigma \\ \sigma & \cdot \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} F^{p-1} \\ \oplus \\ \overline{F}^{p-1} \end{bmatrix} \\
 \downarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} & & \downarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} & & \downarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 A & \xrightarrow{\quad} & A & \xrightarrow{\quad} & A \\
 \searrow -\sigma & & \searrow -\sigma & & \searrow -\sigma \\
 A & \xrightarrow{\quad} & A & \xrightarrow{\quad} & A
 \end{array}$$

Die Vorder- bzw. Hinterwand induziert den Shift-Operator, wie bereits im letzten Abschnitt gesehen. Die seitlichen Wände induzieren Endomorphismen von $\hat{s}_{\mathbb{C}}(p)$ und $\hat{s}_{\mathbb{C}}(p-1)$, die wir komplexe Konjugationen nennen. Sie kommutieren (gemischt) mit dem Shift-Operator. Explizit ist diese komplexe Konjugation gegeben durch:

$$\begin{bmatrix} u \\ o \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -\sigma(u) \\ \sigma(o) \end{bmatrix}$$

11. Die sh -Filtration

Wir führen die folgende Notation ein

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{D}_k^{\mathbb{C}}(A, p) &:= \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2p-k}(A, p) := \hat{s}_{\mathbb{C}}(p) \quad \text{oder einfach:} \\
 \mathfrak{D}_k^{\mathbb{C}}(p) &:= \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2p-k}(p),
 \end{aligned}$$

wenn es aus dem Kontext klar ist. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathfrak{D}^{2p-2k-2}(p) & \longrightarrow & \mathfrak{D}^{2p-2k-1}(p) & \longrightarrow & \mathfrak{D}^{2p-2k}(p) & \dashrightarrow & \mathfrak{D}^{2p-2}(p) \longrightarrow \mathfrak{D}^{2p-1}(p) \longrightarrow \mathfrak{D}^{2p}(p) \\
 sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow \\
 \mathfrak{D}^{2p-2k-2}(p-1) & \longrightarrow & \mathfrak{D}^{2p-2k-1}(p-1) & \longrightarrow & \mathfrak{D}^{2p-2k}(p-1) & \dashrightarrow & \mathfrak{D}^{2p-2}(p-1) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\
 sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow \\
 \mathfrak{D}^{2p-2k-2}(p-2) & \longrightarrow & \mathfrak{D}^{2p-2k-1}(p-2) & \longrightarrow & \mathfrak{D}^{2p-2k}(p-2) & \dashrightarrow & 0 \\
 sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow \\
 \mathfrak{D}^{2p-2k-2}(p-k) & \longrightarrow & \mathfrak{D}^{2p-2k-1}(p-k) & \longrightarrow & \mathfrak{D}^{2p-2k}(p-k) & & & & & & \\
 sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & & & & & \\
 \mathfrak{D}^{2p-2k-2}(p-k-1) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & & & & & & \\
 \downarrow & & & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

Die Zeilen dieses Diagramms sind Komplexe, und sh ist eine Abbildung zwischen diesen Komplexen. Das Diagramm ist (nach oben und) nach links natürlich zu erweitern.

Parallel können wir die alternative Notation benutzen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\mathfrak{D}_{2k+2}^{\mathbb{C}}(p) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_{2k+1}^{\mathbb{C}}(p) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_{2k}^{\mathbb{C}}(p) & \dashrightarrow & \mathfrak{D}_4^{\mathbb{C}}(p) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_3^{\mathbb{C}}(p) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_2^{\mathbb{C}}(p) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_1^{\mathbb{C}}(p) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_0^{\mathbb{C}}(p) \\
sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{D}_{2k}^{\mathbb{C}}(p-1) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_{2k-1}^{\mathbb{C}}(p-1) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_{2k-2}^{\mathbb{C}}(p-1) & \dashrightarrow & \mathfrak{D}_2^{\mathbb{C}}(p-1) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_1^{\mathbb{C}}(p-1) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_0^{\mathbb{C}}(p-1) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\mathfrak{D}_{2k-2}^{\mathbb{C}}(p-2) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_{2k-3}^{\mathbb{C}}(p-2) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_{2k-4}^{\mathbb{C}}(p-2) & \dashrightarrow & \mathfrak{D}_0^{\mathbb{C}}(p-2) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & & & & \\
sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & 0 & & & & & & & & \\
sh \downarrow & & sh \downarrow & & sh \downarrow & & & & & & & & & & \\
\mathfrak{D}_2^{\mathbb{C}}(p-k) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_1^{\mathbb{C}}(p-k) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_0^{\mathbb{C}}(p-k) & & & & & & & & & & \\
sh \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & & & & & \\
\mathfrak{D}_0^{\mathbb{C}}(p-k-1) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & & & & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Die Längen der punktierten (waagrechten und senkrechten) Pfeile konnten nicht maßstabsgetreu gegeben werden. Das letzte Diagramm hat eine natürlichere Indizierung, die senkrechten sh -Abbildungen sind diesbezüglich vom Grad -2 und verbinden nur positive Grade.

Wir richten nun unser Blick auf den Komplex $\mathfrak{D}_*^{\mathbb{C}}(p)$. Die **Kerne** der Abbildungen

$$\text{id}, sh, sh^2, \dots, sh^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}, 0, \dots$$

bilden eine aufsteigende Filtration. Die Resultate des nächsten Kapitels sind auch durch die Lupe dieser wichtigen Filtration zu betrachten. Der Autor möchte explizit das Beispiel 8.4 an der Seite 128 unterstreichen, und hat im Rahmen dieser Arbeit keine andere Chance, für die Bedeutung dieser Filtration zu plädieren.

Der Chern–Charakter

1. Die Transgressionsformeln

1.1. Multikomplexe. $\bigwedge^\bullet \mathbb{R}^n$ ist eine \mathbb{Z} –kommutative Algebra. Ohne die Notation zu ändern werden wir mit der erweiterten \mathbb{Z} –Spur:

$$\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z} : \mathcal{A}_X(\mathcal{E}) \otimes \bigwedge^\bullet \mathbb{R}^n$$

arbeiten. Sie verschwindet auf \mathbb{Z} –Kommutatoren.

Wir betrachten nun Multikomplexe von Bündeln vom Grad n . Diese sind \mathbb{Z}^n –graduierte Bündel, versehen mit einer Differentialabbildung \mathbf{v} , die Grad Eins in der assoziierten \mathbb{Z} –Graduierung besitzt. Sie hat eine kanonische Zerlegung $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n$, wobei der \mathbb{Z}^n –Grad der Komponente \mathbf{v}_i dem i -ten kanonischen Basisvektor gleicht. Die Gleichheit $\mathbf{v}^2 = 0$, i.e. \mathbf{v} superkommutiert mit sich selbst, impliziert das Superkommutieren der Anteile \mathbf{v}_i .

Wir arbeiten nur mit beschränkten Multikomplexen von Bündeln, und werden des weiteren dies semantisch unterdrücken und den generischen Ausdruck “Multikomplex” dafür oft benutzen.

Ein Multikomplex von Bündeln vom Grad n mit dem Gesamtdifferential \mathbf{v} heißt exakt, falls jeder Anteil \mathbf{v}_i exakt (im durch die i -te Projektion $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ induzierten \mathbb{Z} –graduierten Komplex) ist. Insbesondere ist \mathbf{v} als Differential im totalen (diagonal \mathbb{Z} –graduierten) Komplex exakt. Ein *exakter* Multikomplex vom Grad n wird n –Multikomplex genannt.

1.2. Deformationen von Metriken. Eine Metrik auf einem Multikomplex E vom Grad n ist eine Split–Metrik $h = \oplus h^n$, wobei h^n eine Metrik auf E^n für jeden Multiindex $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_n)$ ist. Deformationen von solchen Metriken sind insbesondere Deformationen der Komponenten.

BEISPIEL 1.1. Die spezielle Deformation der Metrik ist gegeben durch den Operator:

$$(108) \quad H_{\mathbf{t}} := \bigoplus_{\mathbf{n} \text{ Multiindex}} \mathbf{t}^{\mathbf{n}} \cdot \text{id}_{E^n},$$

für $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. Dabei kürzen wir $\mathbf{t}^{\mathbf{n}} := t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_n^{n_n}$. Die deformierte Metrik induziert die Deformation des Superzusammenhangs gegeben durch $\nabla_{\mathbf{t}} = (\bar{\partial} + \mathbf{v}) + (\partial + \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}^*)$. Nur die Komponente ∇' ändert sich. Der adjungierte Operator \mathbf{v}^* bezieht sich dabei auf die nichtdeformierte Metrik. Unter $\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}^*$ verstehen wir das formale Skalarprodukt $\sum_i t_i \mathbf{v}_i^*$.

Die Superkrümmung ändert sich entsprechend, und wir geben zuerst die Formeln für ihrer Deformationen.

Wir arbeiten mit folgenden Operatoren:

$$(109) \quad \begin{array}{lll} d_{\mathbf{t}} & := d\mathbf{t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} & \text{genauer} \quad d_{\mathbf{t}} A := \sum_i d\mathbf{t}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}_i} A \\ d^c & := \bar{\partial} - \partial & \text{parallel zu} \quad d = \bar{\partial} + \partial \\ \nabla^c & := \nabla'' - \nabla' & \text{parallel zu} \quad \nabla = \nabla'' + \nabla' \end{array}$$

Wir werden einen glatten Schnitt von Endomorphismen mit dem Differentialoperator nullter Ordnung identifizieren, der durch die Multiplikation mit diesem Endomorphismus erklärt ist. Wir geben zuerst folgendes allgemeines Deformationslemma:

LEMMA 1.2. Sei $k_{\mathbf{t}}$ eine Deformation der Metrik k durch Operatoren $H_{\mathbf{t}}$. Dann ist das Differential des Zusammenhangs $d_{\mathbf{t}}(\nabla_{\mathbf{t}}) = d_{\mathbf{t}}(\nabla) = [d_{\mathbf{t}}, \nabla]$ gegeben durch:

$$(110) \quad d_{\mathbf{t}}(\nabla) = -[\nabla', \mathbf{N}(\mathbf{t})],$$

für einen geeigneten Differentialoperator nullten Grades $\mathbf{N}(\mathbf{t})$, genannt auch Nummeroperator, der im Laufe des Beweises präzisiert wird.

BEWEIS: Wir nehmen zuerst $t = t \in \mathbb{R}$. Die Variation der Metrik von t auf $t+s$ ist gegeben durch: $k_{t+s} = kH_{t+s} = k_t H_t^{-1} H_{t+s} =: k_t G_{t,s}$ mit einer neu eingeführten eindeutigen Bezeichnung $G = G_{t,s}$, um weitere Berechnungen zu komprimieren. Es gilt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \nabla_{t+s} &= \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \{ \nabla_t + G^{-1} [\nabla'_t, G] \} \\ &= \left. \{ -G^{-1} G'_s G^{-1} \nabla'_t G + G^{-1} \nabla'_t G'_s \} \right|_{s=0} \\ &= [\nabla'_t, G'_s]_{s=0} \end{aligned}$$

Der Nummeroperator ist gegeben durch:

$$(111) \quad \mathbf{N}(\mathbf{t}) := \sum_i dt_i \frac{\partial}{\partial t_i} (G).$$

□

1.3. Der Nummeroperator. Arbeiten wir mit **der** speziellen Deformation einer Metrik aus dem Beispiel 1.1, so notieren wir den entsprechenden Nummeroperator einfach durch **N**. Seine spezielle Gestalt und weitere später benötigte verwandte Operatoren werden nun im Blockformat zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sum_i \mathbf{N}_i = \sum_i N_i \frac{dt_i}{t_i} = d_t(hH_t) & \mathbf{N}_i &= N_i \frac{dt_i}{t_i} \\ \mathbf{V} &= \sum_i \mathbf{V}_i = \sum_i \mathbf{v}_i \frac{dt_i}{t_i} & \mathbf{V}_i &= \mathbf{v}_i \frac{dt_i}{t_i} \\ \mathbf{V}^* &= \sum_i \mathbf{V}_i^* = \sum_i \mathbf{v}_i^* \frac{dt_i}{t_i} & \mathbf{V}_i^* &= \mathbf{v}_i^* \frac{dt_i}{t_i} \end{aligned}$$

Diese Operatoren erscheinen natürlich in der folgenden Berechnung. Es gilt:

$$\begin{aligned} (\nabla + \mathbf{N})^2 &= \nabla^2 + [\mathbf{v} + \mathbf{v}^*, \mathbf{N}] \\ &= \nabla^2 + \sum_{ij} [\mathbf{v}_i, N_j] \frac{dt_j}{t_j} + \sum_{ij} N_j [\mathbf{v}_i, \frac{dt_j}{t_j}] \\ &\quad + \sum_{ij} [\mathbf{v}_i^*, N_j] \frac{dt_j}{t_j} + \sum_{ij} N_j [\mathbf{v}_i^*, \frac{dt_j}{t_j}] \\ &= \nabla^2 + \sum_i (-\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^*) \frac{dt_i}{t_i} \\ &= \nabla^2 - \mathbf{V} + \mathbf{V}^* \end{aligned}$$

und analog

$$(\nabla^c + \mathbf{N})^2 = (\nabla^c)^2 - \mathbf{V} - \mathbf{V}^* = -\nabla^2 - \mathbf{V} - \mathbf{V}^*$$

Die Abhängigkeit von \mathbf{t} wird des weiteren nicht mehr hervorgehoben. Für späteren Verbrauch stellen wir die folgenden Relationen (112) bis (115) im Blockformat fest. Sie sind voneinander stufenweise offensichtlich abzuleiten. Sie sind ein Ersatz für den Konjugationstrick von FALTINGS **[Fa]** und leisten den gewünschten transgressiven Übergang auch in höheren Dimensionen. Die Idee ist, die Konjugation *während* der Limesbildung wie in **[Fa]** durch die Tatsache zu ersetzen, daß der deformierte Zusammenhang eine Differentialgleichung erfüllt. In **[ABKS]** wird eine andere Deformation benutzt. Ein Kommentar dazu ist in dem Abschnitt 4.1 zusammengefaßt.

$$(112) \quad \mathbf{N}^2 = 0$$

$$(113) \quad [\nabla, \nabla^c] = 0$$

$$(114) \quad [d_t, \nabla] = -[\nabla', \mathbf{N}] \quad [d_t, \nabla^c] = [\nabla', \mathbf{N}]$$

$$\begin{aligned} [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}, \nabla] &= \frac{1}{2}[\nabla^c, \mathbf{N}] & [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}, \nabla^c] &= \frac{1}{2}[\nabla, \mathbf{N}] \\ [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}, \nabla + \mathbf{N}] &= \frac{1}{2}[\nabla^c, \mathbf{N}] & [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}, \nabla^c + \mathbf{N}] &= \frac{1}{2}[\nabla, \mathbf{N}] \\ [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}, (\nabla + \mathbf{N})^2] &= \frac{1}{2}[\nabla^c, [\nabla, \mathbf{N}]] & [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}, (\nabla^c + \mathbf{N})^2] &= \frac{1}{2}[\nabla, [\nabla^c, \mathbf{N}]] \\ &= \frac{1}{2}[\nabla^c, (\nabla + \mathbf{N})^2] & &= \frac{1}{2}[\nabla, (\nabla^c + \mathbf{N})^2] \end{aligned}$$

$$(115) \quad [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N} - \frac{1}{2}\nabla^c, (\nabla + \mathbf{N})^2] = 0 \quad [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N} - \frac{1}{2}\nabla, (\nabla^c + \mathbf{N})^2] = 0$$

1.4. Die dd^c -Transgression. Wir geben nun den Beweis für die dd^c -Transgression. Dieses Resultat formulieren wir für beliebige Deformationen der Metrik.

LEMMA 1.3. *Sei h_t eine beliebige Deformation der Metrik auf einem Multikomplex vom Grad n mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}^n$. Sei $\mathbf{N}(t)$ der entsprechende Nummeroperator. Dann gilt:*

$$(116) \quad d_t \text{ \$ } f(\nabla^2) \text{ \$ } = -\frac{1}{2}dd^c \text{ \$ } f'(\nabla^2) \mathbf{N}(t) \text{ \$ }$$

für jedes polynomiale Funktionalkalkül der Krümmung, gegeben durch ein Polynom mit komplexen Koeffizienten f .

BEWEIS: Die Relation (114) gilt für einen allgemeinen Nummeroperator: $d_t(\nabla) = [d_t, \nabla] = -[\nabla', \mathbf{N}(t)]$. Entsprechend gelten:

$$\begin{aligned} [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}(t), \nabla] &= \frac{1}{2}[\mathbf{N}(t), \nabla^c] \\ [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}(t), \nabla^2] &= [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}(t), \nabla]\nabla - \nabla[d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}(t), \nabla] \\ &= -\frac{1}{2}[\nabla, [\nabla^c, \mathbf{N}(t)]] \end{aligned}$$

Die Ableitungsformel für den Operator d_t , die Verschwindung der Superspur auf Superkommutatoren, das Superkommutieren von ∇ und ∇^c und die Ableitungsformeln für die Operatoren ∇ und ∇^c ergeben:

$$\begin{aligned} d_t \text{ \$ } \nabla^{2k} \text{ \$ } &= \text{ \$ } [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}(t), \nabla^{2k}] \text{ \$ } \\ &= \sum_{k_1+k_2=k-1} \text{ \$ } \nabla^{2k_1} [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}(t), \nabla^2] \nabla^{2k_2} \text{ \$ } \\ &= -\frac{1}{2}k \text{ \$ } [\nabla, [\nabla^c, \mathbf{N}(t)]] \nabla^{2(k-1)} \text{ \$ } \\ &= -\frac{1}{2}dd^c \text{ \$ } k \nabla^{2(k-1)} \mathbf{N}(t) \text{ \$ } \end{aligned}$$

□

Die Transgression (116) gilt natürlich für eine größere Klasse von Funktionen f wegen der Stetigkeit der Superspur.

1.5. Die Transgressionsformeln. Wir führen nur eine Konvention ein, um einfacher die Struktur des trunktierten DOLBEAULT-Komplexes in Griff zu bekommen.

NOTATION 1.4 (Der Typ einer Differentialform). *Seien P und K feste natürliche Zahlen. Wir konzentrieren uns auf $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2P-K}(A, P)$ und betrachten zuerst ein Paar besondere Fälle.*

- $K = 0$: $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2P}(A, P)$ besteht aus (P, P) -Formen. Sie befinden sich auf der Diagonale des DOLBEAULT-Komplexes. Wir ordnen ihnen den Typ $(0, 0||0)$ zu.
- $K = 1$: $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2P-1}(A, P)$ besteht aus diagonalen $(P-1, P-1)$ -Formen. Wir ordnen ihnen den Typ $(0, 0||1)$ zu.

- $K = 2$: $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2P-2}(A, P)$ besteht aus $(P-1, P-2)$ bzw. $(P-2, P-1)$ -Formen, welchen wir Typ $(1, 0||1)$ respektive $(0, 1||1)$ zuordnen.
- K allgemein : $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2P-K}(A, P)$ besteht aus $(P-1-q, P-1-p)$ -Formen aus A vom DOLBEAULT-Grad $(2P-K)-1$, $K \geq 1$, für geeignete positive Zahlen p, q : $p+q = K-1$.
Den Formen vom Bigrad: $(P-1, P-K)$, $(P-2, P-K+1)$, \dots , $(P-K, P-1)$
ordnen wir respektive den Typ: $(K-1, 0||1)$, $(K-2, 1||1)$, \dots , $(0, K-1||1)$
zu.

Wir schreiben für den Typ $(p, q||1)$ auch einfach (p, q) , wenn unmißverständlich, und benutzen die Notation $TYP(p, q)$ für alle Formen vom Typ $(p, q||1)$.

Die Typen (p, q) , die in $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2P-K}(A, P)$ vorkommen, befinden sich im A -Bigrad gleich $(P-1-q, P-1-p)$, und die Differenz $p-q$ mißt den Abstand zur Diagonale des DOLBEAULT-Komplexes. Diese Eigenschaften werden beibehalten, arbeitet man in der direkten Summe:

$$(117) \quad \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2\bullet-K}(A, \bullet) := \bigoplus_P \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2P-K}(A, P) = \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}(A) .$$

Die Transgressionsformel ist *grosso modo* eine Verbindung zweier Ableitungen bezüglich verschiedener Differentialen, d_t und d_D . Die Konstruktion von höheren CHERN-Formen verlangt die sukzessive Bildung einer Stammfunktion für d_D . "Die (Un)schuld in der Struktur wird transgressiv durch die Brücke der Transgression von d_D auf d_t transferiert". (Das regularisierte) Integrieren nach dem reellen Parameter t liefert dann eine Stammfunktion für d_t .

THEOREM 1.5 (Die Transgressionsformel). *Folgender Kontext sei festgelegt:*

X ist eine komplexe Mannigfaltigkeit,
 E ein $(n+1)$ -dimensionaler Multikomplex von holomorphen Bündeln auf X ,
mit dem Differential $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$, und
mit einer Metrik h , die deformiert wird, durch
 $H_t := \bigoplus_n t^n \cdot \text{id}_{E_n}$, selbstadjungierten Deformationsoperator,
 $t \in \mathbb{R}^{n+1}$ Deformationsparameter,

$\nabla = \nabla_t$ ist der deformierte Superzusammenhang, entstanden nach Vervollständigung zu einem
 $d = \bar{\partial} + \partial$ -derivativen Operator des $\bar{\partial}$ -derivativen Operators vom \mathbb{Z} -Grad gleich $+1$:
 $\nabla'' = \bar{\partial} + \mathbf{v}$ bezüglich der (deformierten) Metrik hH_t . Die Vervollständigung erfolgt durch den
 ∂ -derivativen Operator
 $\nabla' = \partial + \mathbf{v}_t^*$. So gilt: $\nabla = \nabla'' + \nabla'$. Wir schreiben auch \mathbf{v}^* statt \mathbf{v}_t^* , wenn aus dem Kontext klar
ist, ob der adjungierte Operator bezüglich der ursprünglichen Metrik h oder der deformierten
Metrik hH_t gebildet wird.

$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{n+1} N_i \frac{dt_i}{t_i}$ ist der Nummeroperator. Er entsteht als Differential der Abbildung zwischen
Vektorbündeln auf X :

$$X \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \text{Metriken auf } E,$$

wobei nach der Wahl einer festen Metrik auf E der obige Raum der Metriken mit dem Raum
der selbstadjungierten Schnitten in $\text{End}(E)$ identifiziert werden kann.

$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein Polynom mit komplexen Koeffizienten.

Dann finden folgende Transgressionen statt:

Die Transgressionsformeln mit Werten im trunkierten DOLBEAULT-Komplex:

Für p, q mit $TYP(p, q) \subseteq \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2\bullet-n}(A, \bullet)$ (oder äquivalent $p+q = n-1$) gelten:

$$(118) \quad d_t \text{Proj}_{TYP(p,q) \otimes \wedge^n \mathbb{R}^{n+1}} \$ f((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} \$ = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\partial} \text{Proj}_{TYP(p+1,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \\ + \partial \text{Proj}_{TYP(p,q+1) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \end{array} \right\} \$ f((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} \$.$$

und

(119)

$$d_t \text{Proj}_{TYP(p,q) \otimes \wedge^n \mathbb{R}^{n+1}} \$ f((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} \$ = \left\{ \begin{array}{l} \frac{p+1}{n+1} \bar{\partial} \text{Proj}_{TYP(p+1,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \\ + \frac{q+1}{n+1} \partial \text{Proj}_{TYP(p,q+1) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \end{array} \right\} \$ f((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} \$$$

Die Transgressionsformel mit Werten im DOLBEAULT-Komplex:

$$(120) \quad d_t \text{Proj}_{\wedge^n \mathbb{R}^{n+1}} \$ f((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \$ = \frac{1}{2} d \text{Proj}_{\wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \$ f((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \$$$

Die folgenden drei Abschnitte beinhalten den Beweis des Theorems.

2. Beweis für die DOLBEAULT-Transgression

Wir nehmen $f(x) = x^k$. Der Beweis ist ein direktes Korollar der Relation (115) und der Ableitungsformel:

$$\left(d_t - \frac{1}{2} d \right) \$ (\nabla + \mathbf{N})^{2k} \$ = \$ [d_t + \frac{1}{2} \mathbf{N} - \frac{1}{2} \nabla, (\nabla + \mathbf{N})^{2k}] \$ = 0.$$

□

Unabhängig von diesem Beweis werden wir eine kurze Zwischenbemerkung über Konvergenzprobleme, die vorkommen können, wollen wir mit einer größeren Klasse von Funktionen als nur mit Polynomen arbeiten.

Wir werden später Interesse für f gleich der Exponentialabbildung haben. Die Superspur ist stetig. Die Konvergenzprobleme hängen dann eng mit dem guten Verhalten von $\exp(-t[\mathbf{v}, \mathbf{v}^*] + o(t) \cdot \text{Störung})$ für $t \rightarrow \infty$ zusammen: Der Operator $[\mathbf{v}, \mathbf{v}^*] = \mathbf{v}\mathbf{v}^* + \mathbf{v}^*\mathbf{v}$ ist faserweise streng positiv wegen der Exaktheit von \mathbf{v} .

Aus diesem Grunde gilt die Transgression für die größere Klasse von gegen ∞ schnell abklingenden Funktionen.

3. Beweis für die erste Deligne-Transgression

Wir nehmen wie im Falle der DOLBEAULT-Transgression $f(x) = x^k$ an, die Formel gilt *a posteriori* für eine größere Klasse von Funktionen f . Der Beweis läuft nach parallelen technischen Umformungen. Jedoch ist die Anwesenheit des Nummeroperators \mathbf{N} eine zusätzliche kombinatorische Verwicklung.

Seien p, q mit $p+q = n-1$ und $n \geq 1$. $TYP(p, q) \otimes \wedge^n \mathbb{R}^{n+1}$ ist dann ein Summand innerhalb von $D^{2\bullet-n} \otimes \wedge^n$. Die Operatoren $\bar{\partial}$ und ∂ können durch Berücksichtigung der $(0,1)$ bzw. $(1,0)$ Grade des Differentials d_D isoliert werden, und wir möchten nun ihre (gemischten Super-)Kommutatoren mit den Projektoren auf bestimmte Typen des Komplexes $D^{2\bullet-n}(A, \bullet)$ berechnen. Es gelten:

$$(121) \quad \text{Proj}_{TYP(p,q)} \partial = \partial \text{Proj}_{TYP(p,q+1)}$$

$$(122) \quad \text{Proj}_{TYP(p,q)} \bar{\partial} = \bar{\partial} \text{Proj}_{TYP(p+1,q)}.$$

Wir starten nun die entscheidende Berechnung des Beweises:

$$\begin{aligned} d_t \text{Proj}_{TYP(p,q) \otimes \wedge^n} \$ (\nabla^c + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$ &= \text{Proj}_{TYP(p,q) \otimes \wedge^{n+1}} \left\{ \left(d_t - \frac{1}{2} d \right) + \frac{1}{2} d \right\} \$ (\nabla^c + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$ \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\partial} \text{Proj}_{TYP(p+1,q) \otimes \wedge^{n+1}} \\ \partial \text{Proj}_{TYP(p,q+1) \otimes \wedge^{n+1}} \end{array} \right\} \$ (\nabla^c + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$ \end{aligned}$$

Wir haben beim zweiten Übergang folgende einfache Bemerkung benutzt: Der Differentialoperator $d_t - \frac{1}{2} d$ kann durch die Ableitungsformel innerhalb der Superspur transferiert werden, und dort entsteht die Bildung des Superkommutators

$$\begin{aligned} [d_t + \frac{1}{2} \mathbf{N} - \frac{1}{2} \nabla, (\nabla^c + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N}] &= (\nabla^c + \mathbf{N})^{2k} [d_t + \frac{1}{2} \mathbf{N} - \frac{1}{2} \nabla, \mathbf{N}] \quad \text{aus (115)} \\ &= (\nabla^c + \mathbf{N})^{2k} [-\frac{1}{2} \nabla, \mathbf{N}] \end{aligned}$$

Im letzten Ausdruck befinden sich nur Terme, in welchen der \wedge^\bullet -Grad $(p+q)$ gleicht, da jedes dt_i von einem Operator $[\nabla'', \mathbf{N}]$ oder $[\nabla', \mathbf{N}]$ gebunden ist. Diese Terme liefern keinen Beitrag nach Projektion.

4. Beweis für die zweite Deligne–Transgression

Der Anfang der Berchnung ist ähnlich dem DOLBEAULT–Fall.

$$\begin{aligned}
 d_t \text{ } \$ (\nabla + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$ &= \$ [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}, (\nabla + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N}] \$ \\
 &= \sum_{\alpha+\beta=k-1} \$ (\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} [d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}, (\nabla + \mathbf{N})^2] (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N} \$ \\
 (123) \quad &= \sum_{\alpha+\beta=k-1} \$ -\frac{1}{2}[\nabla, [\nabla^c, \mathbf{N}]] (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N} (\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$
 \end{aligned}$$

Wir haben beim ersten Übergang die Ableitungsformel, beim zweiten die $\$$ -POISSON–Gleichung und beim dritten die Relation (115) benutzt. Die bearbeitung des Termes innerhalb der Superspur in (123) liefert:

$$\begin{aligned}
 [\nabla[\nabla^c \mathbf{N}]] \quad & (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N} (\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \quad (*) \\
 &= [\nabla + \mathbf{N}, [\nabla^c, \mathbf{N}]] \quad (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N} (\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \\
 &= [\nabla + \mathbf{N}, \quad [\nabla^c, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \quad \mathbf{N} (\nabla + \mathbf{N})^{2\beta}] \\
 &\quad - [\nabla^c, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} [\nabla + \mathbf{N}, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \\
 &= [\nabla + \mathbf{N}, \quad [\nabla^c, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N} (\nabla + \mathbf{N})^{2\beta}] \\
 &\quad - [\nabla^c, \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} [\nabla + \mathbf{N}, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta}] \\
 &\quad - \mathbf{N} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha-1} (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha_1} [\nabla^c, (\nabla + \mathbf{N})^2] (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha_2} [\nabla, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \\
 &\quad - \mathbf{N} \quad (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} [\nabla^c, [\nabla, \mathbf{N}]](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \quad (**) \\
 &\quad - \mathbf{N} \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta-1} (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} [\nabla, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta_1} [\nabla^c, (\nabla + \mathbf{N})^2] (\nabla + \mathbf{N})^{2\beta_2}
 \end{aligned}$$

Aus der $\$$ –JACOBI–Gleichung für ∇ , ∇^c und \mathbf{N} folgt

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} [\nabla^c, [\nabla, \mathbf{N}]](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \\
 &= +\mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} [\nabla, [\nabla^c, \mathbf{N}]](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \\
 &= -[\nabla, [\nabla^c, \mathbf{N}]](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} + \text{Superkommutatoren},
 \end{aligned}$$

i.e. (**) gleicht dem Anfangsterm (*) nach Sumation.

Auch kann $[\nabla^c, (\nabla + \mathbf{N})^2]$ durch $[\nabla^c, [\nabla, \mathbf{N}]] = -[\nabla, [\nabla^c, \mathbf{N}]]$ ersetzt werden, da ∇ und ∇^c $\$$ –kommutieren. Wir können fortsetzen:

$$\begin{aligned}
 (124) \quad & 2 \sum_{\alpha+\beta=k-1} \$ [\nabla, [\nabla^c, \mathbf{N}]](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$ \\
 &= \sum_{\alpha+\beta=k-1} \left\{ \begin{array}{l} d \text{ } \$ [\nabla^c, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$ \\ -d^c \text{ } \$ \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} [\nabla, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$ \end{array} \right\} \\
 &\quad - \sum_{\alpha+\beta+\gamma=k-2} \$ \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \left\{ \begin{array}{l} [\nabla^c, [\nabla, \mathbf{N}]](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} [\nabla, \mathbf{N}] \\ [\nabla, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} [\nabla^c, [\nabla, \mathbf{N}]] \end{array} \right\} (\nabla + \mathbf{N})^{2\gamma} \$
 \end{aligned}$$

$$(125) \quad = \sum_{\alpha+\beta=k-1} \left\{ \begin{array}{l} d \text{ } \$ [\nabla^c, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$ \\ -d^c \text{ } \$ [\nabla, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$ \end{array} \right\}$$

$$(126) \quad - \sum_{\alpha+\beta+\gamma=k-2} \$ [\nabla, [\nabla^c, \mathbf{N}]](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \left\{ \begin{array}{l} [\nabla, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} [\nabla, \mathbf{N}] \end{array} \right\} (\nabla + \mathbf{N})^{2\gamma} \$$$

Wir suchen eine explizite Form mit Atomen ∇^2 , \mathbf{V}_i und \mathbf{V}_i^* für (124), (125) und (126) nach Anwendung des Operators $\mathbf{Proj}_{\text{TYP}(p,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}}$.

Explizite Form für (124). In (124) hat $[\nabla[\nabla^c \mathbf{N}]]$ A(End(E))–Grad (in \mathbb{Z}) gleich Null und $\wedge^{\bullet} \mathbb{R}^{n+1}$ –Grad (in \mathbb{Z}) gleich 1. Sichtbar ist noch der Operator \mathbf{N} mit gleichen separierten \mathbb{Z} –Graden.

Um $\wedge^{\bullet} \mathbb{R}^{n+1}$ –Grad gleich $n+1$ in (124) zu isolieren, müssen wir aus den vielen Operatoren $(\nabla + \mathbf{N})^2 = \nabla^2 + [\nabla \mathbf{N}]$ genau $n-1$ mal den Operator $[\nabla \mathbf{N}]$ und sonst nur ∇^2 pflücken. Folgende Form wird erreicht:

$$(127) \quad \mathbf{Proj}_{\text{TYP}(p,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \sum_{\alpha+\beta=k-1} \$ [\nabla[\nabla^c \mathbf{N}]](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$ =$$

$$= \mathbf{Proj}_{\text{TYP}(p,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ |a|=(k-1)-(n-1)}} \$ [\nabla[\nabla^c \mathbf{N}]] \nabla^{2a_1} [\nabla \mathbf{N}] \dots \nabla^{2a_j} \mathbf{N} \nabla^{2a_{j+1}} \dots [\nabla \mathbf{N}] \nabla^{2a_{n+1}} \$$$

Explizite Form für (126). In

$$\mathbf{Proj}_{\text{TYP}(p,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=k-2} \$ [\nabla, [\nabla^c, \mathbf{N}]](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \left\{ \begin{array}{l} [\nabla, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} [\nabla, \mathbf{N}] \end{array} \right\} (\nabla + \mathbf{N})^{2\gamma} \$$$

sind genau $(n-1)$ Glieder gleich zu

$$\mathbf{Proj}_{\text{TYP}(p,q) \otimes \wedge^{n+1}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ |a|=(k-1)-(n-1)}} \$ [\nabla, [\nabla^c, \mathbf{N}]] \nabla^{2a_1} [\nabla \mathbf{N}] \dots [\nabla \mathbf{N}] \nabla^{2a_j} \mathbf{N} \nabla^{2a_{j+1}} [\nabla \mathbf{N}] \dots [\nabla \mathbf{N}] \nabla^{2a_{n+1}} \$$$

für die $(n-1)$ möglichen Positionierungen des Termes $[\nabla \mathbf{N}]$ aus

$$\left\{ \begin{array}{l} [\nabla, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} [\nabla, \mathbf{N}] \end{array} \right\}$$

Zusammen mit (127) ergibt sich:

$$(128) \quad \mathbf{Proj}_{\text{TYP}(p,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=k-2} \$ [\nabla, [\nabla^c, \mathbf{N}]](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \left\{ \begin{array}{l} [\nabla, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} [\nabla, \mathbf{N}] \end{array} \right\} (\nabla + \mathbf{N})^{2\gamma} \$ =$$

$$= (n-1) \mathbf{Proj}_{\text{TYP}(p,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \sum_{\alpha+\beta=k-1} \$ [\nabla[\nabla^c \mathbf{N}]](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$$$

Die Relation zwischen (124), (125) und (126) schreibt sich nun einfacher unter Berücksichtigung von (128):

$$(129) \quad \mathbf{Proj}_{\text{TYP}(p,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \sum \$ [\nabla, [\nabla^c, \mathbf{N}]](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{\text{TYP}(p,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \mathbf{Proj} \left\{ \begin{array}{l} \text{d} \quad \$ [\nabla^c, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$ \\ -\text{d}^c \quad \$ [\nabla, \mathbf{N}](\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N}(\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$ \end{array} \right\}.$$

Explizite Form für (125). Wir ersetzen d, d^c und $[\nabla, \mathbf{N}], [\nabla^c, \mathbf{N}]$ durch $\bar{\partial} \pm \partial$ beziehungsweise $[\nabla'' \pm \nabla', \mathbf{N}]$ in (125) und bemerken, daß in der Summe der Terme

$$(130) \quad \left\{ \begin{array}{cc} (\bar{\partial} + \partial) & \$ [\nabla'' - \nabla', \mathbf{N}] (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N} (\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$ \\ (-\bar{\partial} + \partial) & \$ [\nabla'' + \nabla', \mathbf{N}] (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N} (\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$ \end{array} \right\}$$

nur die Gruppierungen

- zwischen $\bar{\partial}$ und $[\nabla', \mathbf{N}]$
- und zwischen ∂ und $[\nabla'', \mathbf{N}]$

überleben, und es entsteht der Ausdruck:

$$(131) \quad -2 \quad \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \sum_{\alpha+\beta=k-1} \left\{ \begin{array}{cc} \bar{\partial} & \$ [\nabla', \mathbf{N}] (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N} (\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$ \\ -\partial & \$ [\nabla'', \mathbf{N}] (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N} (\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} \$ \end{array} \right\}.$$

Wir verwenden die Vertauschungsregeln für die Projektionsoperatoren mit ∂ und $\bar{\partial}$ (121) und (122) und leiten eine ähnliche Überlegung wie in dem Abschnitt 4 ein, um diese Projektionen mit den entsprechenden Projektionen des Operators $(\nabla + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N}$ zu vergleichen. Es gelten:

$$\begin{aligned} \text{Proj}_{\text{TYP}(p+1,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \sum_{\alpha+\beta=k-1} \$ (\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} [\nabla', \mathbf{N}] (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N} \$ &= (p+1) \quad \text{Proj}_{\text{TYP}(p+1,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \$ (\nabla + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$ \\ \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q+1) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \sum_{\alpha+\beta=k-1} \$ (\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} [\nabla'', \mathbf{N}] (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N} \$ &= (q+1) \quad \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q+1) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \$ (\nabla + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$ \end{aligned}$$

Dafür die Begründung: Im $\text{TYP}(p+1, q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}$ des Operators $(\nabla + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N}$ befinden sich alle möglichen nichtkommutativen multiplikativen Kombinationen von Operatoren, für die gilt:

- Der Operator $[\nabla', \mathbf{N}]$ erscheint $(p+1)$ mal,
- der Operator $[\nabla'', \mathbf{N}]$ kommt q mal vor,
- der Operator \mathbf{N} befindet genau ein Mal unter diesen Faktoren, und
- bis auf monomialen Gesamtgrad gleich $2k$ wird der Faktor ∇^2 benutzt.

Im $\text{TYP}(p+1, q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}$ des jeden Operators $(\nabla + \mathbf{N})^{2\beta} [\nabla', \mathbf{N}] (\nabla + \mathbf{N})^{2\alpha} \mathbf{N}$ erscheinen die gleichen nichtkommutativen Kombinationen dieser Faktoren mit der Einschränkung, daß sich an der $(\beta+1)$ -ten Stelle der Operator $[\nabla', \mathbf{N}]$ befindet. Jeder Term der Projektion von $(\nabla + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N}$ erscheint aus diesem Grund $(p+1)$ mal, und zwar für diejenigen β , so daß die $(\beta+1)$ -te Stelle dieses Termes vom Operator $[\nabla', \mathbf{N}]$ besetzt ist.

Der Faktor -2^{-1} aus (123) kürzt sich mit dem Faktor (-2) aus (131) und durch (129) folgt:

$$d_t \quad \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q) \otimes \wedge^n \mathbb{R}^{n+1}} \$ (\nabla + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$ = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{p+1}{n+1} \bar{\partial} & \text{Proj}_{\text{TYP}(p+1,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \$ (\nabla + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$ \\ -\frac{q+1}{n+1} \partial & \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q+1) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \$ (\nabla + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$ \end{array} \right\}$$

$(\nabla + \mathbf{N})^2 = \nabla^2 + [\nabla'', \mathbf{N}] + [\nabla', \mathbf{N}]$ unterscheidet sich von $-(\nabla^c + \mathbf{N})^2 = -\nabla^c{}^2 - [\nabla'', \mathbf{N}] - [-\nabla', \mathbf{N}] = \nabla^2 - [\nabla'', \mathbf{N}] + [\nabla', \mathbf{N}]$ durch Änderung des Vorzeichens in dem $[\nabla'', \mathbf{N}]$ -Anteil. Die Projektion auf $\text{TYP}(p, q)$ ist disebezüglich sensibel.

$\$ (\nabla^c + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$$ und $(-1)^k (-1)^q \$ (\nabla + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$$ haben aus diesem Grund gleichen $\text{TYP}(p, q) \otimes \wedge^n \mathbb{R}^{n+1}$ -Anteil. In der obigen rechten Hand werden aus ähnlichen Überlegungen die Vorzeichen $(-1)^k (-1)^q$ bei $\bar{\partial}$ beziehungsweise $(-1)^k (-1)^{q+1}$ bei ∂ beim Übergang von $(\nabla + \mathbf{N})^2$ zu $(\nabla^c + \mathbf{N})^2$ erscheinen. Es folgt:

$$d_t \quad \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q) \otimes \wedge^n \mathbb{R}^{n+1}} \$ (\nabla^c + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$ = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{p+1}{n+1} \bar{\partial} & \text{Proj}_{\text{TYP}(p+1,q) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \$ (\nabla^c + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$ \\ \text{plus } \frac{q+1}{n+1} \partial & \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q+1) \otimes \wedge^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}} \$ (\nabla^c + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$ \end{array} \right\}.$$

□

4.1. Eine Alternative Deformation. Wir haben bereits im Vorspann der Formeln (112) bis (115) die Diskussion einer alternativen Deformation angekündigt. Wir vergleichen zuerst die zwei Deformationen:

$$(132) \quad \nabla = \nabla'' + \nabla' := (\bar{\partial} + \mathbf{v}) + (\partial + t \cdot \mathbf{v}^*) \quad \text{nach FALTINGS}$$

$$(133) \quad \nabla = \nabla'' + \nabla' := (\bar{\partial} + t \cdot \mathbf{v}) + (\partial + \bar{t} \cdot \mathbf{v}^*) \quad \text{à la SOULÉ}$$

Im ersten Fall ist t ein *reeller* Deformationsparameter: $t \in \mathbb{R}^n$.

Im zweiten ist $t \in \mathbb{C}^n$. Die Verdopplung der reellen Dimension hat den Vorteil, die Geometrie zu verdeutlichen. Der Nachteil besteht darin, daß kompliziertere Formeln benutzt werden müssen, um ein Analogon des (noch einzuführenden) regularisierten Integrals zu fabrizieren. Der entsprechende Integrationsprozess ist zumindest in Dimension $n = 1$ das Integrieren gegen die Funktion $\log |t|^2$.

Wir geben nun die Analoga der Formeln (112) bis (115) für die komplexe Deformation (133) durch $t \in \mathbb{C}^n$, nachdem die Notation festgelegt wurde:

$$(134) \quad \nabla'' := \bar{\partial} + t \cdot \mathbf{v} \quad \nabla' := \partial + \bar{t} \cdot \mathbf{v}^*$$

$$(135) \quad \mathbf{N}'' := \sum \frac{dt_i}{t_i} N_i \quad \mathbf{N}' := \sum \frac{d\bar{t}_i}{\bar{t}_i} N_i$$

$$(136) \quad d_t'' := \sum dt_i \frac{\partial}{\partial t_i} \quad d_t' := \sum d\bar{t}_i \frac{\partial}{\partial \bar{t}_i}$$

Wir betrachten die Differentialoperatoren:

$$(137) \quad \nabla := \nabla'' + \nabla' \quad \nabla^c := \nabla'' - \nabla'$$

$$(138) \quad \mathbf{N} := \mathbf{N}'' + \mathbf{N}' \quad \mathbf{N}^c := \nabla'' - \nabla'$$

$$(139) \quad d_t := d_t'' + d_t' \quad d_t^c := d_t'' - d_t'$$

Wir stellen sukzessive folgende Relationen fest:

$$(140) \quad [d_t'', \nabla''] = [-\mathbf{N}, \nabla''] \quad [d_t'', \nabla'] = 0$$

$$(141) \quad [d_t', \nabla'] = [\mathbf{N}, \nabla'] \quad [d_t', \nabla''] = 0$$

$$\mathbf{N}^2 = 0$$

$$[\nabla, \nabla^c] = 0$$

$$[d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}^c, \nabla] = [d_t'' + \frac{1}{2}\mathbf{N}'', \nabla''] + [d_t'' + \frac{1}{2}\mathbf{N}'', \nabla']$$

$$+ [d_t' - \frac{1}{2}\mathbf{N}', \nabla''] + [d_t' - \frac{1}{2}\mathbf{N}', \nabla']$$

$$= [-\frac{1}{2}\mathbf{N}'', \mathbf{N}] + [\frac{1}{2}\mathbf{N}op'', \nabla']$$

$$- [\frac{1}{2}\mathbf{N}', \nabla''] + [\frac{1}{2}\mathbf{N}', \nabla']$$

$$= -\frac{1}{2}[\mathbf{N}'' + \mathbf{N}', \nabla''] + \frac{1}{2}[\mathbf{N}'' + \mathbf{N}', \nabla']$$

$$= -\frac{1}{2}[\mathbf{N}, \nabla^c]$$

$$= -\frac{1}{2}[\nabla^c, \nabla + \mathbf{N}] \quad \text{also}$$

$$[d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}^c, \nabla + \mathbf{N}] = [-\frac{1}{2}\nabla^c, \nabla + \mathbf{N}] \quad \text{und schließlich}$$

$$[d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}^c + \frac{1}{2}\nabla^c, \nabla + \mathbf{N}] = 0$$

Der Operator $d_t + \frac{1}{2}\mathbf{N}^c + \frac{1}{2}\nabla^c$ superkommutiert mit $\nabla + \mathbf{N}$, also mit beliebigem Funktional kalkül von $(\nabla + \mathbf{N})^2$. Dies kann benutzt werden, um eine Transgression mit Werten in dem DOLBEAULT-Komplex zu erzielen.

5. Der Differentialring Ξ und die K-theoretische Anwendung der Transgressionsformeln

Die Transgressionsformeln erklären differential-algebraische Relationen zwischen metrisierten Multikomplexen. Für ihre Anwendung benötigen wir eine linearisierte "metrisierte" Form – $\mathbb{Z}K(\tilde{\mathcal{P}}_X)$ – von $\mathbb{Z}K(\mathcal{P}_X)$, welche für eine Varietät X anstelle der Kategorie \mathcal{P}_X der projektiven Bündel auf X die Kategorie $\tilde{\mathcal{P}}_X$ involviert, welche als Objekte projektive Bündel E auf X mit einer ausgezeichneten hermiteschen Metrik auf $E(\mathbb{C})$ über $X(\mathbb{C})$ hat. Wir betrachten dabei $X(\mathbb{C})$ und $E(\mathbb{C})$ als Objekte in der Kategorie der \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeiten.

5.1. Die Kategorie $\tilde{\mathcal{P}}_X$. Sei X eine Varietät. Sei \mathcal{P}_X die abelsche Kategorie der projektiven Bündel auf X .

DEFINITION 5.1. Die Kategorie $\tilde{\mathcal{P}}_X$ hat

- als Objekte:** Paare (E, h) , wobei E ein Objekt in \mathcal{P}_X ist, und h eine hermitesche Metrik auf der komplexen \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeit $E(\mathbb{C})$, gesehen als Bündel über $X(\mathbb{C})$, und
- als Morphismen:** Morphismen in \mathcal{P}_X zwischen den Bündel-Komponenten dieser Paar-Objekte. (Sie sind an keiner Verträglichkeit mit Metriken gebunden.) Es gilt also

$$\tilde{\mathcal{P}}_X[(E_1, h_1) \rightarrow (E_2, h_2)] := \mathcal{P}_X[E_1 \rightarrow E_2].$$

Wir versehen die Kategorie $\tilde{\mathcal{P}}_X$ mit zusätzlicher Struktur.

Die direkte Summe zweier Objekte (E_1, h_1) und (E_2, h_2) ist das Objekt $(E_1 \oplus E_2, h_1 \oplus h_2)$. (Unsere Sprechweise ist formal: Kategoriell ist $(E_1 \oplus E_2, h_1 \oplus h_2)$ **eine** direkte Summe, jede Änderung der Metrik-Komponente liefert eine andere. Wir verwenden in $\tilde{\mathcal{P}}_X$ den Begriff "direkte Summe" nur für $(E_1 \oplus E_2, h_1 \oplus h_2)$.)

Eine (kurze oder lange) Sequenz in $\tilde{\mathcal{P}}_X$

$$\dots \longrightarrow (E_0, h_0) \longrightarrow (E_1, h_1) \longrightarrow \dots$$

heißt **exakt**, genau dann wenn die Sequenz in \mathcal{P}_X

$$\dots \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots$$

im üblichen Sinne exakt ist. (Unsere Sprechweise ist erneut formal.)

Wir führen ein und beschreiben nun den Ring:

$$(142) \quad \Xi = \Xi(X) := \left(\mathbb{Z}K^{\$}(\tilde{\mathcal{P}}_X), +, \otimes, \partial \right), \quad \text{mit kanonischen Basis-Elementen der Form} \\ \xi^{[n]} = (E^{\bullet[n]}, \mathbf{v}^{\bullet[n]}, h^{\bullet[n]}).$$

- $\mathbb{Z}K_n^{\$}(\tilde{\mathcal{P}}_X)$ ist die freie abelsche Gruppe, erzeugt von durch h metrisierten und bezüglich \mathbf{v} in jeder Richtung exakten, **superkommutativen** n -Multikomplexen von Bündeln auf X , $\xi^{[n]} = (E^{\bullet[n]}, \mathbf{v}^{\bullet[n]}, h^{\bullet[n]})$.

Das \mathbb{Z}^n -graduieretes Bündel $E^{\bullet[n]} = \bigoplus_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n} E^{\mathbf{n}}$ ist der totale Komplex mit Differential $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n$, wobei \mathbf{v}_i die Komponente von \mathbf{v} mit \mathbb{Z}^n -Grad gleich $(\dots, 0, 1 \text{ auf der } i\text{-ten Stelle}, 0, \dots)$ ist. Es gilt $\mathbf{v}^2 = 0$ wegen der Superkommutativität des Multikomplexes. (Die Morphismen \mathbf{v}_i $\$$ -kommutieren untereinander.) Die Exaktheit von \mathbf{v} folgt aus der Exaktheit jeder Richtung \mathbf{v}_i .

Die Metrik $h^{\bullet[n]} = \bigoplus_{\mathbf{n}} h^{\mathbf{n}}$ ist gegeben durch die Festlegung je einer Metrik $h^{\mathbf{n}}$ auf $E^{\mathbf{n}}$. Dabei ist \mathbf{n} ein Multiindex mit n Komponenten.

- Die Addition in Ξ ist $+$, die Addition in der freien ABELschen Gruppe zur Menge der exakten Multikomplexe in $\tilde{\mathcal{P}}_X$.

Wir signalisieren aber auch die Anwesenheit der Operation \oplus , der direkten Summe von zwei Multikomplexen gleichen Grades.

- \otimes ist das Tensorprodukt zweier Multikomplexe. Diese Operation ist verträglich mit der \mathbb{Z} -Graduierung des Ringes. Sie ist per Definition distributiv bezüglich $+$, und durch die üblichen Eigenschaften der direkten Summe und des Tensorprodukts (in einer Tensorkategorie) distributiv bezüglich \oplus .
- $\partial := \sum (-1)^{i-1} \partial_i$ ist die übliche Bildung. Wir wiederholen sie:

Ein exakter Multikomplex wird durch ∂_i auf die alternierende formale Summe abgebildet, welche seine Unter-Multikomplexe beinhaltet, worauf der \mathbb{Z} -Grad bzgl. der i -ten Richtung jeweils konstant s ist:

$$\partial_i(E^{\bullet[n]}, \mathbf{v}^{\bullet[n]}, h^{\bullet[n]}) := \sum_s (-1)^s \left(E^{\bullet[n], \text{ mit } n_i = s}, \sum_{t \neq s} \mathbf{v}_t, h^{\bullet[n], \text{ mit } n_i = s} \right)$$

Die Transgression mit Werten in dem DOLBEAULT-Komplex hat als direktes Korollar die Konstruktion in (149) einer CHERN-*Formen*-Abbildung ch:

$$(143) \quad \text{ch} = \bigoplus_n {}^{(n)}\text{ch} \quad (\Xi, +, \otimes, \partial) \xrightarrow{n} \left(\bigoplus_n \left[\bigoplus_{|p-q| \leq n} A_X^{pq} \right], +, \wedge, d \right) \longrightarrow (A, +, \wedge, d)$$

mit Werten in dem DOLBEAULT-Komplex, welche wir im Abschnitt 7 einführen.

Die funktorielle Verträglichkeit der **multiplikativen** und differentialen Strukturen steht im Mittelpunkt der Konstruktion. Wir erreichen eine Verallgemeinerung des klassischen CHERN-Charakter, welcher durch die differentialgeometrische Bildung entsteht:

$$(E, \nabla) \longrightarrow \text{Spur} \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \nabla^2 \right).$$

5.2. (Ko)homologische Unabhängigkeit von der Wahl der Metriken. Es gibt einen kanonischen Vergiß-Funktor $! : \tilde{\mathcal{P}}_X \rightarrow \mathcal{P}_X$. Eine Wahl von Metriken für Objekte aus \mathcal{P}_X ist ein Funktor $F : \mathcal{P}_X \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_X$, so daß die Verknüpfung $! \circ F : \mathcal{P}_X \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_X \rightarrow \mathcal{P}_X$ die Identität ist.

Eine Wahl der Metriken F induziert einen kanonischen Komplex-Morphismus $\mathbb{Z}(F) : \mathbb{ZK}^\S(\mathcal{P}_X) \rightarrow \mathbb{ZK}^\S(\tilde{\mathcal{P}}_X)$. Auch induziert $!$ einen Vergiß-Funktor $\mathbb{Z}(!) : \mathbb{ZK}^\S(\tilde{\mathcal{P}}_X) \rightarrow \mathbb{ZK}^\S(\mathcal{P}_X)$.

Dabei ist $\mathbb{ZK}^\S(\mathcal{P}_X)$ der Komplex erzeugt in jeder Dimension von exakten, superkommutativen Komplexen in \mathcal{P}_X .

SATZ 5.2. Für zwei Wahlen von Metriken $F, G : \mathcal{P}_X \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_X$ sind die Komplex-Morphismen $\mathbb{Z}(F)$ und $\mathbb{Z}(G)$ homotop.

BEWEIS: Sei E ein Basis-Element von $\mathbb{ZK}_n(\mathcal{P}_X)$. Sei $H(E)$ das Basis-Element aus $\mathbb{ZK}_{n+1}(\tilde{\mathcal{P}}_X)$, dessen Darstellung nach der ersten Richtung

$$H(E) := [\quad \cdots \rightarrow 0 \rightarrow (\mathbb{Z}(F))(E) = (\mathbb{Z}(G))(E) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots]$$

ist. Genauer ist $H(E)$ bestimmt durch die Relationen: $\partial_1^0 H(E) = (\mathbb{Z}(F))(E)$, $\partial_1^1 H(E) = (\mathbb{Z}(G))(E)$, $\partial_1^a H(E) = 0$ für andere \mathbb{Z} -Grade bzgl. der ersten Richtung a , und das Vergessen der Metriken ergibt $\mathbb{Z}(!) H(E) = [\cdots \rightarrow 0 \rightarrow E = E \rightarrow 0 \rightarrow \cdots]$, den bzgl. der ersten Richtung ausgearteten Multikomplex zu E .

Die lineare Fortsetzung von H ist eine Homotopie. \square

5.3. Die Übersetzung der nichtkommutativen Diagramme in kommutative Diagramme. Sei \mathcal{C} eine exakte/ABELSCHE Kategorie.

Sei $\mathbb{ZK}^\S(\mathcal{C})$ der Komplex erzeugt im Grad n von exakten, **superkommutativen** Multikomplexen mit n Richtungen in \mathcal{C} . Sei $\mathbb{ZK}(\mathcal{C})$ der Komplex erzeugt im Grad n von exakten, **kommutativen** Multikomplexen mit n Richtungen in \mathcal{C} .

Das Differential in beiden Komplexen ist gegeben durch:

$$\partial := \sum_{i,a} (-1)^{i+a} \partial_i^a.$$

Wir führen in $\mathbb{ZK}^\S(\mathcal{C})$ ein neues Differential δ ein, indem wir eine isomorphe Abbildung zwischen den graduierten zu $\mathbb{ZK}^\S(\mathcal{C})$ und $\mathbb{ZK}(\mathcal{C})$ unterliegenden Gruppen definieren.

- Wir definieren eine Abbildung $T : \mathbb{ZK}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{ZK}_n^\S(\mathcal{C})$. Sei ξ ein Basis-Element von $\mathbb{ZK}_n(\mathcal{C})$. Dann ist für jede Ecke $V \in \mathbb{Z}^n$ das Objekt $\xi(V)$ in der Kategorie \mathcal{C} festgelegt. Für jede Ecke V und jede Richtung $i = 1, 2, \dots, n$ ist weiter durch ξ eine Abbildung

$$\xi(V, i) : \xi(V) \rightarrow \xi(V + e_i)$$

definiert, so daß kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \xi(V) & \xrightarrow{\xi(V,i)} & \xi(V + e_i) \\ \xi(V,j) \downarrow & & \downarrow \xi(V+e_i,j) \\ \xi(V + e_j) & \xrightarrow{\xi(V+e_j,i)} & \xi(V + e_i + e_j) \end{array}$$

Dabei sind e_i und e_j der kanonische i -te bzw. j -te Basisvektor in \mathbb{Z}^n .

- Wir definieren $T\xi \in \mathbb{Z}K_n^{\mathfrak{s}}(\mathcal{C})$ wie folgt: Für eine Ecke $V \in \mathbb{Z}^n$ setzen wir

$$(T\xi)(V) := \xi(V) .$$

Wir werden Vorzeichen $\epsilon(V, i) \in \{+1, -1\}$ in Kürze festlegen, so daß für die Morphismen:

$$(T\xi)(V, i) := \epsilon(V, i)\xi(V, i) : T\xi(V) \rightarrow T\xi(V + e_i)$$

das folgende Diagramm **super**kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \xi(V) & \xrightarrow{T\xi(V, i)} & \xi(V + e_i) \\ T\xi(V, j) \downarrow & & \downarrow T\xi(V + e_i, j) \\ \xi(V + e_j) & \xrightarrow{T\xi(V + e_j, i)} & \xi(V + e_i + e_j) \end{array}$$

Dies ist äquivalent zur Relation:

$$\epsilon(V + e_j, i)\epsilon(V, j) = -\epsilon(V + e_i, j)\epsilon(V, i) .$$

- Wir wählen diese Vorzeichen als:

$$\epsilon(V, i) := (-1)^{[\sum_{s < i} V_s]} ,$$

wobei $V = (V_1, \dots, V_n) \in \mathbb{Z}^n$ die kanonische Darstellung von V als Element von \mathbb{Z}^n ist. Diese Wahl erfüllt die obige Relation.

- Wir definieren nun das neue Differential δ auf $\mathbb{Z}K_n^{\mathfrak{s}}(\mathcal{C})$ durch die Kommutativität des Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}K_{n-1}(\mathcal{C}) & \xleftarrow{\partial} & \mathbb{Z}K_n(\mathcal{C}) \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ \mathbb{Z}K_{n-1}^{\mathfrak{s}}(\mathcal{C}) & \xleftarrow{\delta} & \mathbb{Z}K_n^{\mathfrak{s}}(\mathcal{C}) \end{array}$$

Es ist $\delta = T\partial T^{-1}$, und wir definieren parallel $\delta_i^a := T\partial_i^a T^{-1}$.

Sei $V \in \mathbb{Z}^n$, sei $a := V_i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\delta_i^a \xi)(\partial_i V, j) &= (T\partial_i^a T^{-1} \xi)(\partial_i V, j) \\ &= \epsilon(\partial_i V, j)\epsilon(V, j) \cdot \partial_i^a \xi(\partial_i V, j) \\ &= \begin{cases} (-1)^a & \text{falls } i < j , \\ 1 & \text{falls } i > j . \end{cases} \end{aligned}$$

Wir haben diesen Unterabschnitt in einer sehr detaillierten Darstellung präsentiert, damit es klar wird, daß die KpG -Konstruktion, welche kommutative Diagramme/Multikomplexe involviert, in direktem Zusammenhang mit dem Ring Ξ steht.

(Der Aufmerksame Leser wird später bemerken, daß die CHERN-Charaktere für Elemente der Form $\partial\xi$ und $\delta\xi$ übereinstimmen. Dies liegt daran, daß in der obigen Formel das Resultat nur von a abhängt.)

6. Das regularisierte Integral

Eine Anpassung des regularisierten Integrals aus [Fa] wird ohne wesentliche Änderungen dargestellt.

6.1. Das regularisierte Integral in mehreren Variablen. Sei \mathcal{K} die Klasse der Abbildungen $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$, so daß für ein geeignetes n die Funktion $t \rightarrow t^n f(t)$ unendlich differenzierbar, auf der Mannigfaltigkeit mit Rand $[0, \infty)$ ausdehnbar und schnell abklingenden bei ∞ samt aller Ableitungen ist.

Konvergenzprobleme des Integrals von f bei der unendlichen Stelle existieren nicht. Das regularisierte Integral erweitert das Integral der Funktionen aus \mathcal{K} , die im Ursprung einen endlichen Grenzwert haben, auf ganz \mathcal{K} .

Für f in \mathcal{K} kann im Ursprung folgende asymptotische Entwicklung geschrieben werden:

$$f(t) \sim \sum_{l=-n}^{-1} a_l t^l + \mathcal{O}(t^0).$$

Wir definieren eine ζ -Regularisierung dieser Funktion

$$(144) \quad \zeta_f(s) = \zeta(s) , \quad \text{wenn der Kontext klar ist, durch:}$$

$$(145) \quad := \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) t^s dt$$

Diese ζ -Regularisierung konvergiert für große Werte von s und besitzt eine analytische Erweiterung zur ganzen komplexen Ebene. Wir definieren nun:

$$(146) \quad \text{reg} \int_0^\infty f(t) dt := \zeta'_f(0)$$

Speziell für die Funktion $f(t) = t^{-1}e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, ist $\zeta(s) = \lambda^{-s}$, so daß ihr regularisiertes Integral $-\log \lambda$ gleicht. Insbesondere gilt für f in \mathcal{K} , so daß $f(0)$ definiert ist:

$$(147) \quad \text{reg} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty \frac{f(t) - e^{-t}f(0)}{t} dt .$$

(Für diese Arbeit interessieren nur Funktionen mit einer einfachen Polstelle in 0.)

(Für $f(t) := e^{-\lambda t}$ liefern die Ableitung nach λ und ihre Vertauschung mit dem Integral in 147 eine direkte Berechnung für $\text{reg} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t} dt = -\log \lambda$.)

6.2. Das regularisierte Integral in mehreren Variablen. Wir erweitern die Definition des regularisierten Integrals für schnell abklingende Funktionen mehrerer Variablen $f : \mathbb{R}_{>0}^n \rightarrow \mathbb{C}$, so daß für einen geeigneten Multiindex \mathbf{n} die Funktion $\mathbf{t} \mapsto \mathbf{t}^{\mathbf{n}} f(\mathbf{t})$ eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ besitzt. Wir bezeichnen diesen Raum auch mit \mathcal{K} . Dabei bestehen wir darauf, daß das Analogon des Theorems von FUBINI gilt.

6.3. Das Superintegral. In diesemn Unterabschnitt beschreiben wir eine Vorzeichenregel für das Analogon des Satzes von FUBINI für die Erweiterung des Integrals nach \mathbb{S} -Tensorieren mit einem Superring.

Sei U eine offene Menge in \mathbb{R}^n und seien t_1, t_2, \dots, t_n die kanonischen Koordinaten.

Dann ist $\int_U f(\mathbf{t}) dt_1 dt_2 \dots dt_n$ für $f \in L^1(U)$ definiert.

Sei A eine Superalgebra über \mathbb{C} . Wir erweitern formal das Integral zu einer Abbildung

$$\int : A \otimes L^1, (U, \wedge^\bullet) \rightarrow A \otimes L^1, (U, \wedge^n) \rightarrow A$$

mit Beibehalten der gleichen Notation durch die Formel:

$$\int a \otimes \omega := \begin{cases} 0 & \text{falls der Grad von } \omega \text{ nicht maximal ist,} \\ a \int f(\mathbf{t}) dt_1 dt_2 \dots dt_n & \text{falls } \omega = f(\mathbf{t}) dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_n . \end{cases}$$

Das Tensorprodukt ist im Sinne der Superalgebra genommen.

SATZ 6.1. Seien $U \in \mathbb{R}^n$ und $V \in \mathbb{R}^m$ offen und ω und η integrierbare Differentialformen maximalen Grades auf U bzw. V . Die Koordinaten werden mit t bzw. s notiert. Auf $U \times V$ sind dann (t, s) die kanonischen Koordinaten. Dann gilt folgende Übersetzung des Satzes von FUBINI:

$$\int (a \otimes \omega)(t) (b \otimes \eta)(s) = (-1)^{|\omega||b|} \left(\int a \otimes \omega \right) \left(\int b \otimes \eta \right)$$

□

7. CHERN-Formen mit Werten im DOLBEAULT-Komplex

Im Abschnitt (5) haben wir bereits gewisse Notationen eingeführt, die wir des weiteren übernehmen. Wir benutzen für das metrisierte Differentialbündel $(E^{\bullet[n]}, \mathbf{v}^{\bullet[n]}, h^{\bullet[n]})$ die Notation ξ (bzw. $\xi^{[n]}$) oder \underline{E}^\bullet (bzw. $\underline{E}^{\bullet[n]}$).

SATZ 7.1. Die Abbildung ch

$$(148) \quad \begin{array}{ccc} \Xi(X) & \xrightarrow{ch} & A_X \\ \parallel & & \uparrow \\ \bigoplus_n \mathbb{Z} [\{ \text{Menge aller } (E^{\bullet[n]}, \mathbf{v}^{\bullet[n]}, h^{\bullet[n]}) \}] & \xrightarrow[\bigoplus_n (n)ch]{} & \bigoplus_n \left[\bigoplus_{|p-q| \leq n} A_X^{pq} \right] \end{array}$$

definiert auf Erzeugenden $\xi^{[n]} = (E^{\bullet[n]}, \mathbf{v}^{\bullet[n]}, h^{\bullet[n]})$ durch

$$(149) \quad {}^{(n)}ch(\xi^{[n]}) := \frac{1}{2^n} \text{reg} \int_{\mathbb{R}_+^n} \$ \exp(-\nabla^2 - \mathbf{V} - \mathbf{V}^*) \$,$$

wobei $\nabla := \nabla_{\mathbf{t}}$ der deformierte metrische $\$$ -Zusammenhang auf $E^{\bullet[n]}$ zur Metrik $h^{\bullet[n]}$ ist, erfüllt die Eigenschaften:

$$(150) \quad ch(\underline{E}_1^{\bullet} \oplus \underline{E}_2^{\bullet}) = ch(\underline{E}_1^{\bullet}) + ch(\underline{E}_2^{\bullet})$$

$$(151) \quad (-1)^{|\underline{E}_1^{\bullet}| |\underline{E}_2^{\bullet}|} ch(\underline{E}_1^{\bullet} \otimes \underline{E}_2^{\bullet}) = ch(\underline{E}_1^{\bullet}) \wedge ch(\underline{E}_2^{\bullet})$$

$$(152) \quad ch(\partial \underline{E}^{\bullet}) = \partial ch(\underline{E}^{\bullet})$$

$\text{reg} \int$ ist dabei das regularisierte Integral in \mathbb{R}_+^n für schnell abklingenden Funktionen.

BEWEIS:

- Seien $\underline{E}_1^{\bullet[n]}$ und $\underline{E}_2^{\bullet[n]}$ zwei Multikomplexe mit gleicher Anzahl von Richtungen, so daß die Summe $\underline{E}^{\bullet[n]} := \underline{E}_1^{\bullet[n]} \oplus \underline{E}_2^{\bullet[n]}$ wohldefiniert ist. Mit offensichtlichen Notationen gelten dann:

$$\begin{aligned} E^{\bullet[n]} &= E_1^{\bullet[n]} \oplus E_2^{\bullet[n]}, & \text{i.e. } E^{\mathbf{n}} &= E_1^{\mathbf{n}} \oplus E_2^{\mathbf{n}}, \text{ für alle } \mathbf{n} \text{ mit } |\mathbf{n}| = n, \\ \nabla &= \nabla_1 \oplus \nabla_2, & \text{also } \nabla^2 &= \nabla_1^2 \oplus \nabla_2^2, \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2, & \text{und } \mathbf{V}^* &= \mathbf{V}_1^* \oplus \mathbf{V}_2^*. \end{aligned}$$

Alle Operatoren sind mit dem gleichen Parameter, \mathbf{t} , deformiert. (150) folgt nun aus den trivialen Identitäten:

$$\begin{aligned} \exp(A \oplus B) &= \exp(A) \oplus \exp(B) \\ \$ (A \oplus B) \$ &= \$ A \$ + \$ B \$. \end{aligned}$$

- Seien nun $\underline{E}_1^{\bullet[n_1]}$ und $\underline{E}_2^{\bullet[n_2]}$ beliebig und $\underline{E}^{\bullet[n]} := \underline{E}_1^{\bullet[n_1]} \otimes \underline{E}_2^{\bullet[n_2]}$, mit $n = n_1 + n_2$. Wie im Fall der direkten Summe beschreiben wir zuerst die Komponenten von $\underline{E}^{\bullet[n]}$ in Abhängigkeit von den zwei Tensorfaktoren:

$$\begin{aligned} \nabla &= \nabla_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \nabla_2, & \nabla^2 &= \nabla_1^2 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \nabla_2^2, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{v}_2, & \mathbf{v}^* &= \mathbf{v}_1^* \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{v}_2^*, \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{V}_2, & \mathbf{V}^* &= \mathbf{V}_1^* \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{V}_2^*. \end{aligned}$$

\otimes steht dabei für das Supertensorprodukt. ∇ , \mathbf{v} und \mathbf{V} beinhalten stillschweigend auch den Deformationsparameter $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^n \cong \mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2} \ni (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$, und ∇_i , \mathbf{v}_i und \mathbf{V}_i , $i = 1, 2$, hängen nur von \mathbf{t}_i ab. Aus den Relationen

$$\begin{aligned} \exp(A \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes B) &= \exp(A \otimes \mathbf{1}) \exp(\mathbf{1} \otimes B) \\ &= \exp(A) \otimes \exp(B), \\ &\text{und} \\ \$ (A \otimes B) \$ &= \$ A \$ \cdot \$ B \$. \end{aligned}$$

folgt (151) nach Anwendung des Theorems von FUBINI (151) sofort:

$$\begin{aligned} {}^{(n)}ch(\underline{E}^{\bullet[n]}) &= \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} \$ \exp(-\nabla^2 - \mathbf{V} - \mathbf{V}^*) \$ \\ &= \frac{1}{2^{n_1}} \frac{1}{2^{n_2}} \int_{\mathbb{R}_+^{n_1+n_2}} \$ \exp(-\nabla_1^2 - \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_1^*) \$ \cdot \$ \exp(-\nabla_2^2 - \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_2^*) \$ \\ &= (-1)^{n_1 n_2} {}^{(n_1)}ch(\underline{E}_1^{\bullet[n_1]}) \wedge {}^{(n_2)}ch(\underline{E}_2^{\bullet[n_2]}). \end{aligned}$$

- Das Theorem von Stokes und die Transgression ergeben die Verträglichkeit der Differentialstrukturen, (152).

$$\begin{aligned} d {}^{(n)}ch(\underline{E}^{\bullet[n]}) &= \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} d \$ \exp(-\nabla^2 - \mathbf{V} - \mathbf{V}^*) \$ \\ &= -\frac{1}{2^{n-1}} \int_{\mathbb{R}_+^n} d_t \$ \exp(-\nabla^2 - \mathbf{V} - \mathbf{V}^*) \$ \\ &= -\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \$ \exp(-\nabla^2 - \mathbf{V} - \mathbf{V}^*) \$ \Big|_{t_i=0}^{\infty} \end{aligned}$$

(153)

- Der Wert an dem i -ten unendlichen Rand verschwindet wegen des Verhaltens von $[\mathbf{v}, \mathbf{v}^*] = t_i [\mathbf{v}_{\text{in } t_i=1}, \mathbf{v}_{\text{in } t_i=1}^*]$. Dieser Operator kommt versteckt in ∇^2 vor. Die Exaktheit von \mathbf{v} bedeutet, daß $[\mathbf{v}, \mathbf{v}^*] = \mathbf{v}\mathbf{v}^* + \mathbf{v}^*\mathbf{v}$ das Spektrum außerhalb einer Umgebung von 0 in der positiven reellen Halbachse hat. Alle anderen Terme in $(\nabla^c + \mathbf{N})^2$ sind nilpotent, und eine übliche Abschätzung zeigt, daß $\exp(-\nabla^2 - \mathbf{V} - \mathbf{V}^*)$ gleiches Verhalten wie $\exp(-[\mathbf{v}, \mathbf{v}^*])$ für $t_i \rightarrow \infty$ hat, und zwar daß es exponentiell gegen Null konvergiert.
- Für den i -ten Summanden liefern \mathbf{V}_i und \mathbf{V}_i^* nach der Restriktion $t_i = 0$ keinen Beitrag mehr in (153). In

$$\begin{aligned} \nabla &= (\bar{\partial} + \mathbf{v}) + (\partial + \mathbf{v}^*) = \\ &= (\bar{\partial} + \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_j) + \mathbf{v}_i + (\partial + \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_j^*) + t_i \mathbf{v}_i^*|_{t_i=1} \end{aligned}$$

verschwindet der Term $\mathbf{v}^* i = t_i \mathbf{v}_i^*|_{t_i=1}$ in $t_i = 0$. \mathbf{v}_i kann dann nicht mehr in einem Produkt mit den übriggebliebenen Operatoren kombiniert werden, so daß \mathbb{Z}^n -Grad gleich Null entsteht. Solche Produkte liefern dann auch keinen Beitrag mehr in (153). *Summa summarum:*

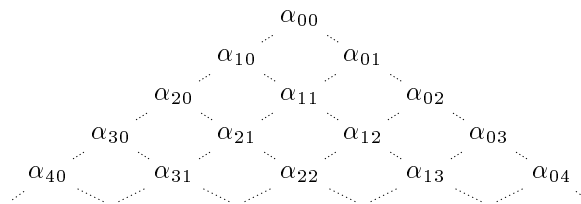
$$\begin{aligned} d^{(n)} \text{ch}(\underline{\mathbb{E}}^{\bullet[n]}) &= \text{plus } \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \$ \exp(-\nabla_{\partial_i \underline{\mathbb{E}}}^2 - \mathbf{V}_{\partial_i \underline{\mathbb{E}}} - \mathbf{V}_{\partial_i \underline{\mathbb{E}}}^*) \$ \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} {}^{(n-1)} \text{ch}(\partial_i \underline{\mathbb{E}}^{\bullet[n]}) \\ &= {}^{(n-1)} \text{ch}(\partial \underline{\mathbb{E}}^{\bullet[n]}) \end{aligned}$$

□

8. CHERN-Charakterformen mit Werten in dem trunkeierten DOLBEAULT-Komplex

8.1. Die höheren Formen. In diesem Unterabschnitt untersuchen wir an Hand der zwei Transgressionsformeln in $\mathfrak{D}_{\bullet}^{\mathbb{C}}(A)$ die Möglichkeit, Komplex-Morphismen $\Xi^{\bullet} \rightarrow \mathfrak{D}_{\bullet}^{\mathbb{C}}(A)$ zu konstruieren. Die multiplikative Verträglichkeit dieser Morphismen wird in den weiteren Unterabschnitten untersucht.

DEFINITION 8.1. *Ein α -Datum ist die Vorgabe von (komplexen) Zahlen $(\alpha_{pq})_{p,q \geq 0}$, indiziert nach ganzen p, q , welche wir in folgender Pyramiden-Darstellung anordnen:*



und welche folgende Relationen erfüllen:

$$\begin{aligned} \alpha_{00} &= 1, \\ \alpha_{p+1,q} + \alpha_{p,q+1} &= \alpha_{pq}, \\ \alpha_{p+1,p} &= \alpha_{p,p+1} = \frac{1}{2} \alpha_{pp}. \end{aligned}$$

SATZ 8.2. *Sei $(\alpha_{pq})_{p,q \geq 0}$ ein festes α -Datum. Die Abbildung*

$$ch : \Xi_{\bullet} \longrightarrow \bigoplus_{\mathbb{P}} \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2\mathbb{P}-\bullet}(A, \mathbb{P}) = \mathfrak{D}_{\bullet}^{\mathbb{C}}(A),$$

definiert für Elemente $\xi \in \Xi_n$, $\xi = \xi^{[n]} = (E^{[n]}, \mathbf{v}^{[n]}, \nabla^{[n]}, h^{[n]})$, durch die Formel:

$$ch(\xi) = {}^n ch(\xi^{[n]}) := \begin{cases} \$ \exp((\nabla^c)^2) \$ & \text{falls } n = 0 \\ \sum_{p+q=n-1} \alpha_{pq} \text{Proj}_{TYP(p,q)} \text{reg} \int_{(0,\infty)^n} \$ \exp((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} \$ & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

ist eine Komplexabbildung.

BEWEIS: Wir benutzen die Transgressionsformeln. In dem Fall $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
 d_s^1 \text{ch}(\xi^{[1]}) &= \text{Res}_0 \text{Res}_1^1 \text{ch}(\xi^{[1]}) = \bar{\partial} \partial^1 \text{ch}(\xi^{[1]}) \\
 &= \text{reg} \int -\frac{1}{2} \text{dd}^c \text{ \$ } \exp((\nabla^c)^2) \mathbf{N} \text{ \$ } , \quad \text{da } \alpha_{00} = 1 \text{ und } \bar{\partial} \partial = -\frac{1}{2} \text{dd}^c \\
 &= \text{reg} \int -d_t \text{ \$ } \exp((\nabla^c)^2) \text{ \$ } , \quad \text{aus (116) für } f(x) = e^{-x} \text{ und aus } (\nabla^c)^2 = -\nabla^2 \\
 &= + \text{ \$ } \exp((\nabla^c)^2) \text{ \$ }_{t=0} \quad (\text{kein Beitrag am unendlichen Rand}) \\
 &= {}^0\text{ch}(\partial \xi^{[1]}) .
 \end{aligned}$$

In dem Fall $n > 1$ benutzen wir wesentlich die Transgressionsformeln (118) und (119). Seien $p, q \geq 0$ mit $p + q + 1 = n - 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q)} d_s^n \text{ch}(\xi^{[n]}) &= \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q)} d_{\text{unten}[-1]}^n \text{ch}(\xi^{[n]}) \\
 &= \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q)} \text{Proj}_{\text{unten}} -(\bar{\partial} + \partial)^n \text{ch}(\xi^{[n]}) \\
 &= \left(-\bar{\partial} \text{Proj}_{\text{TYP}(p+1,q)} - \partial \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q+1)} \right) {}^n\text{ch}(\xi^{[n]}) \\
 &= - \left(\alpha_{p+1,q} \bar{\partial} \text{Proj}_{\text{TYP}(p+1,q)} + \alpha_{p,q+1} \partial \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q+1)} \right) \text{reg} \int_{(0,\infty)^n} \text{ \$ } \exp((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} \text{ \$ } \\
 &= - \text{reg} \int_{(0,\infty)^n} \alpha_{pq} \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q)} d_t \text{ \$ } \exp((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} \text{ \$ }
 \end{aligned}$$

wegen der **zwei** Transgressionsformeln (118) und (119) und der Tatsache, daß $(\alpha_{pq})_{p,q \geq 0}$ ein α -Datum ist,

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_1^n (-1)^{i-1} \alpha_{pq} \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q)} \text{reg} \int_{(0,\infty)^{n-1}} \left(\text{ \$ } \exp((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} \text{ \$ } \Big|_{t_i=0}^{t_i=\infty} \right) \\
 &= \text{plus} \sum_1^n (-1)^{i-1} \alpha_{pq} \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q)} \text{reg} \int_{(0,\infty)^{n-1}} (\text{ \$ } \exp((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} \text{ \$ }_{\text{in } t_i=0}) \\
 &= \sum_1^n (-1)^{i-1} \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q)} {}^{(n-1)}\text{ch} (\partial_i \xi^{[n]}) \\
 &= \text{Proj}_{\text{TYP}(p,q)} {}^{n-1}\text{ch} (\partial \xi^{[n]}) .
 \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 8.3. Eine natürliche Wahl eines α -Datums ist gegeben durch:

$$\alpha_{pq} := \frac{1}{2^{p+q}} .$$

BEISPIEL 8.4. Es gibt aber auch die Möglichkeit, durch die große Freiheit in der rekursiven Wahl der Zahlen α_{pq} möglichst viele unter ihnen gleich 0 zu setzen. Wir geben dafür zwei Varianten:

1. Ansatz: $\alpha_{pq} = 0$ für alle $p, q \geq 1$. Die einzige Wahl der anderen Koeffizienten ist:
 - $\alpha_{00} = 1$.
 - $\alpha_{pq} = \frac{1}{2}$ für $(p, q) \neq (0, 0)$, $pq = 0$.
2. Ansatz: $\alpha_{pq} = 0$ für alle p, q , für die gilt: $|p - q| > 1$. Die einzige Wahl der anderen Koeffizienten ist:
 - $\alpha_{pp} = \frac{1}{2^p}$ für diagonale Koeffizienten,
 - $\alpha_{p+1,p} = \alpha_{p,p+1} = \frac{1}{2^{p+1}}$ für nebendiagonale Koeffizienten.

Wir erhalten auf diese Art und Weise höhere Formen, welche in den Bereichen getragen werden, die zum “ersten” respektive zum “letzten” Filtrationsschritt bzgl. der sh -Filtration entsprechen. (Frage: Der wievielte ist der “letzte”?)

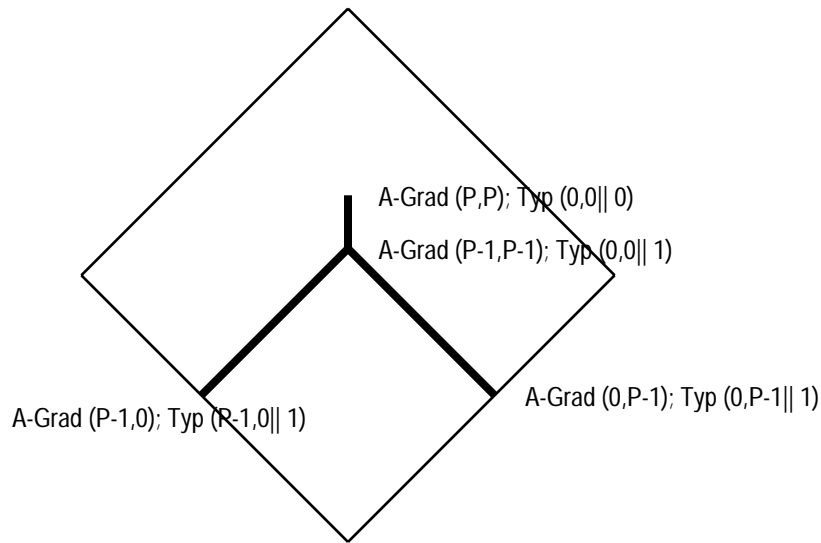


ABBILDUNG 1. 1. Variante

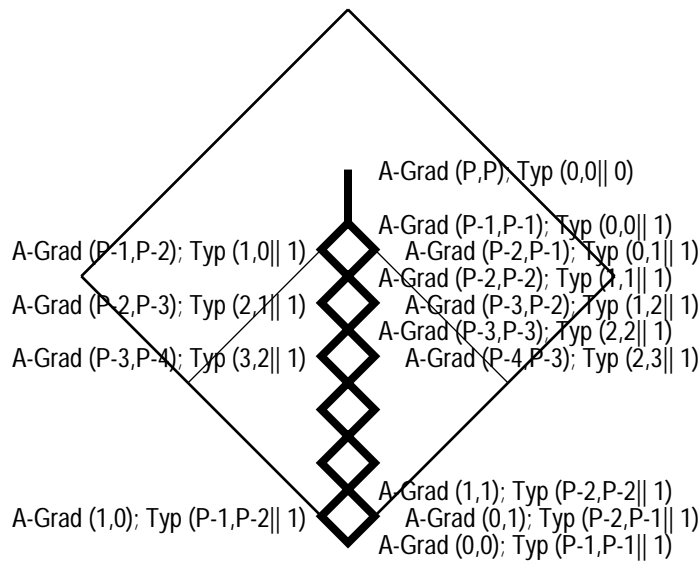


ABBILDUNG 2. 2. Variante

In den Abbildungen 1 und 2 sind durch fette Striche die Bereiche markiert, wo die höheren Formen zu den obigen zwei Varianten getragen sind:

Man kann auch α -Daten einführen, welche vom Twist P aus $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2P-\bullet}(A, P)$ abhängen.

In den nächsten Unterabschnitten untersuchen wir die Verträglichkeit der höheren Formen mit den Produkt-Strukturen.

8.2. Naive Betrachtung der multiplikativen Struktur.

SATZ 8.5. *Die Komplex-Abbildung*

$$ch : \Xi^{\bullet} \longrightarrow \bigoplus_P \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2P-\bullet}(A, P) = \mathfrak{D}_{\bullet}^{\mathbb{C}}(A) ,$$

welche zu den α -Daten $\alpha_{pq} := 2^{-p-q}$

ist nicht verträglich mit den multiplikativen Strukturen, es gilt jedoch:

$$ch(\xi_1 \cdot \xi_2) = ch(\xi_1) \bullet ch(\xi_2)$$

in den folgenden zwei Fällen:

- Entweder ξ_1 oder ξ_2 hat den Grad Null.
- ξ_1 und ξ_2 haben beide Grad Eins.

BEWEIS: Die Multiplikativität in dem Fall, wo beide ξ_1 und ξ_2 den Grad Null haben, ist der klassische bekannte Fall. Wir haben ihn bereits im Rahmen der Multiplikativität des CHERN-Charakters in den DOLBEAULT-Komplex getroffen. Hat ξ_2 den Grad Null, so folgt für $\xi := \xi_1 \cdot \xi_2$:

$$(154) \quad \nabla^c = \nabla^c_1 \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^c_2$$

$$(155) \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{N}_2,$$

wobei selbstverständlich $\mathbf{N}_2 = 0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (\nabla^c + \mathbf{N})^2 &= (\nabla^c_1 + \mathbf{N}_1)^2 \otimes 1 + 1 \otimes (\nabla^c_2)^2 \\ \exp((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} &= \exp((\nabla^c_1 + \mathbf{N}_1)^2) \mathbf{N}_1 \otimes \exp((\nabla^c_2)^2), \end{aligned}$$

und die Multiplikativität folgt aus dem Satz von FUBINI für das regularisierte Integral.

Seien ξ_1 und ξ_2 vom Grad ≥ 1 . Wir starten eine allgemeine Rechnung, welche die Multiplikativität im Fall $|\xi_1| = |\xi_2| = 1$ liefert.

Die Formeln (154) und (155) gelten und ergeben:

$$\begin{aligned} (156) \quad (\nabla^c + \mathbf{N})^2 &= (\nabla^c_1 + \mathbf{N}_1)^2 \otimes 1 + 1 \otimes (\nabla^c_2 + \mathbf{N}_2)^2 \\ \exp((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} &= \exp((\nabla^c_1 + \mathbf{N}_1)^2) \otimes \exp((\nabla^c_2 + \mathbf{N}_2)^2) (\mathbf{N}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{N}_2) \\ &= \exp((\nabla^c_1 + \mathbf{N}_1)^2) \boxed{\mathbf{N}_1} \otimes \exp((\nabla^c_2 + \mathbf{N}_2)^2) \boxed{\phantom{\mathbf{N}_2}} \\ (157) \quad &+ \exp((\nabla^c_1 + \mathbf{N}_1)^2) \boxed{\phantom{\mathbf{N}_1}} \otimes \exp((\nabla^c_2 + \mathbf{N}_2)^2) \boxed{\mathbf{N}_2}. \end{aligned}$$

Die leeren Boxen betonen den Unterschied. Nun werden wir die Tensorfaktoren zu den leeren Boxen bearbeiten. Es gilt im allgemeinen folgendes

LEMMA 8.6. Für jedes Polynom f gilt mit den üblichen Notationen:

$$\text{Proj}_{\bigwedge^n} d^c \$ f'((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} \$ = n \text{Proj}_{\bigwedge^n} \$ f((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \$.$$

Für den Beweis des Lemmas fangen wir mit dem folgenden Ausdruck ein:

$$\begin{aligned} d^c \$ (\nabla^c + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N} \$ &= \$ [\nabla^c + \mathbf{N}, (\nabla^c + \mathbf{N})^{2k} \mathbf{N}] \$ \\ &= \$ (\nabla^c + \mathbf{N})^{2k} [\nabla^c, \mathbf{N}] \$ \\ (158) \quad &= \frac{1}{k+1} \sum_{\alpha+\beta=k} \$ (\nabla^c + \mathbf{N})^{2\alpha} [\nabla^c, \mathbf{N}] (\nabla^c + \mathbf{N})^{2\beta} \$ \end{aligned}$$

Die Projektion auf \bigwedge^n vom letzten Ausdruck (158) für $n \geq 1$ läßt sich einfach vergleichen mit:

$$\text{Proj}_{\bigwedge^n} \$ (\nabla^c + \mathbf{N})^{2(k+1)} \$.$$

Es entstehen nach dem Ausklammern dieser Potenz von $(\nabla^c + \mathbf{N})^2 = \nabla^{c^2} + [\nabla^c, \mathbf{N}]$ alle nichtkommutativen Monome, die n Mal das Auftreten von $[\nabla^c, \mathbf{N}]$ und sonst bis zum Gesamtgrad $(k+1)$ die Atome ∇^{c^2} beinhalten. Jedes solche Monom befindet sich in der Summe aus (158) genau n mal, und zwar für diejenigen α , so daß in diesem Monom an der $(\alpha+1)$ -ten Stelle der $\$$ -Kommutator $[\nabla^c, \mathbf{N}]$ steht.

Damit haben wir das Lemma 8.6 bewiesen. Der Faktor n ist eine entscheidende Störung zur allgemeinen Multiplikativität des Formcharakters. Das Zusammenwirken von (157) und dem Lemma 8.6 ergibt:

$$\begin{aligned} \exp((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} &\equiv \exp((\nabla^c_1 + \mathbf{N}_1)^2) \boxed{\mathbf{N}_1} \otimes \frac{1}{n_2} d^c \exp((\nabla^c_2 + \mathbf{N}_2)^2) \boxed{\mathbf{N}_2} \\ (156 \text{ bis}) \quad &+ \frac{1}{n_1} d^c \exp((\nabla^c_1 + \mathbf{N}_1)^2) \boxed{\mathbf{N}_1} \otimes \exp((\nabla^c_2 + \mathbf{N}_2)^2) \boxed{\mathbf{N}_2}. \end{aligned}$$

Dabei sind n_1 und n_2 die Grade von ξ_1 und ξ_2 , und die Kongruenz \equiv bedeutet, daß Gleichheit gilt, wenn wir auf $\bigwedge^{n=n_1+n_2}$ projizieren. Es gilt dann :

$$\begin{aligned}
{}^n\text{ch}(\xi_1 \cdot \xi_2) &= \frac{1}{2^{n-1}} \text{reg} \int_{(0,\infty)^n} \$ \exp((\nabla_1^c + \mathbf{N}_1)^2) \boxed{\mathbf{N}_1} \otimes \frac{1}{n_2} d^c \exp((\nabla_2^c + \mathbf{N}_2)^2) \boxed{\mathbf{N}_2} \$ \\
&\quad \frac{1}{2^{n-1}} \text{reg} \int_{(0,\infty)^n} \$ \frac{1}{n_1} d^c \exp((\nabla_1^c + \mathbf{N}_1)^2) \boxed{\mathbf{N}_1} \otimes \exp((\nabla_2^c + \mathbf{N}_2)^2) \boxed{\mathbf{N}_2} \$ \\
&= \frac{1}{2} \left\{ (-1)^{n_1(n_2-1)} \frac{1}{n_1} d^c \text{ch}(\xi_1) \wedge \text{ch}(\xi_2) + (-1)^{n_1 n_2} \text{ch}(\xi_1) \wedge \frac{1}{n_2} d^c \text{ch}(\xi_2) \right\}
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\text{ch}(\xi_1 \cdot \xi_2) = (-1)^{|\xi_1||\xi_2|} \text{ch}(\xi_1) \bullet \text{ch}(\xi_2)$$

in den Spezialfällen: $n_1 = n_2 = 1$. Wir schließen daraus auch die letzte Aussage des Satzes. \square

Die Beobachtungen aus diesem Abschnitt motivieren die Suche nach einer veränderten Produktstruktur, so daß die Multiplikativität des "Charakters" hergestellt wird. Diese neue Produktstruktur ist "reicher" als das DELIGNE-Produkt in der DELIGNE-Kohomologie: Sie verschwindet nicht (identisch) auf Typen, wo das DELIGNE-Produkt es definitionsmäßig tut.

8.3. Die Komplexe \mathbf{D} und \mathbf{C} .

8.3.1. Der Komplex \mathbf{D} .

DEFINITION 8.7. Der Komplex (\mathbf{D}, \mathbf{d}) ist definiert wie folgt:

1. \mathbf{D} ist in positiven Graden getragen: $\mathbf{D}_n = 0$ für $n < 0$.
2. $\mathbf{D}_0 := \bigoplus_{\mathbf{P}} \mathbf{D}_0(\mathbf{P})$, wobei

$$\mathbf{D}_0(\mathbf{P}) := \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2\mathbf{P}}(A, \mathbf{P}) \bigcap \text{Ker } d^c = A^{\mathbf{P}, \mathbf{P}} \bigcap \text{Ker } d^c.$$

Elemente aus \mathbf{D}_0 heißen vom Typ $(0, 0||0)$.

3. $\mathbf{D}_n := \bigoplus_{\mathbf{P}} \mathbf{D}_n(\mathbf{P})$ für $n \geq 1$, wobei

$$\mathbf{D}_n(\mathbf{P}) := \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2\mathbf{P}-n}(A, \mathbf{P}) = \bigoplus_{\substack{p+q=n-1 \\ p, q \geq 0}} A^{\mathbf{P}-1-q, \mathbf{P}-1-p}.$$

Elemente aus $A^{\mathbf{P}-1-q, \mathbf{P}-1-p}$ heißen vom Typ $(p, q||1)$.

4. Das Differential $\mathbf{d}: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}_{-1}$ in diesem Komplex ist:

$\mathbf{d}: \mathbf{D}_0 \rightarrow \mathbf{D}_{-1} = 0$ ist die Nullabbildung,

$\mathbf{d}: \mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{D}_0$ ist $-\partial\bar{\partial}: A^{\mathbf{P}-1, \mathbf{P}-1} \rightarrow A^{\mathbf{P}, \mathbf{P}}$,

$\mathbf{d}: \mathbf{D}_n \rightarrow \mathbf{D}_{n-1}$ ist für $n > 1$ und $x \in \mathbf{D}_n$ vom Typ $(p, q||1)$ gegeben durch

$$\mathbf{d}x := \frac{q}{n} \partial x \oplus \frac{p}{n} \bar{\partial} x.$$

Die direkte Summe in letzter Zeile bezieht sich auf die Zerlegung in folgende Typen:

$\frac{q}{n} \partial x$ befindet sich im Typ $(p, q-1||1)$ und $\frac{p}{n} \bar{\partial} x$ im Typ $(p-1, q||1)$

Dabei treffen wir die Konvention, daß der Typ $(p, q||1)$ gleich Null ist, ist eine der Komponenten p oder q streng kleiner 0. Landet einer der Anteile $\frac{q}{n} \partial x$ oder $\frac{p}{n} \bar{\partial} x$ in einen solchen Grad, so bemerken wir zusätzlich die Verschwindung des entsprechenden Koeffizienten $\frac{q}{n}$ respektive $\frac{p}{n}$.

BEMERKUNG 8.8. Der Isomorphismus $M: \mathbf{D}_n(\mathbf{P}) \rightarrow \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2\mathbf{P}-n}(A, \mathbf{P})$ gegeben durch

$$Mx := (-1)^n \frac{p!q!}{n!} x \quad \text{für } x \text{ vom Typ } (p, q||1)$$

ist verträglich mit den Differentialen.

$\mathbf{D}(\mathbf{P})$ stimmt zusätzlich in Graden $\cdot \leq 2$ mit $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}^{2\mathbf{P}}(A, \mathbf{P})$ überein.

Dies erlaubt uns, die reelle Deligne-Kohomologie mittels \mathbf{D} zu berechnen. Wir ziehen vor, innerhalb von \mathbf{D} zu arbeiten, aus mehreren Gründen:

1. Aus technischen Gründen: Viele Berechnungen müssen nicht mehr den Sonderfall des Typs $(0, ?||1)$ oder $(?, 0||1)$ betrachten.
2. In der klassischen Formel, welche den CHERN-Charakter ch in der höheren algebraischen K-Theorie in Abhängigkeit von CHERN-Klassen c_p ausdrückt, erscheinen ähnliche Fakultäten-Twists.
3. **d** "ist" die "richtige" Antwort auch in anderen Fällen: Für seine Definition sind dividierte Potenzen ausreichend, und im Falle der syntomischen Kohomologie bzgl. einer Charakteristik \wp , des kristallinen Pendants zur Deligne-Kohomologie, würde seine parallele Einführung die mathematisch psychologische Grenze der Dimension $\wp - 1$ überwinden können. (Der Autor hat in dieser Richtung (sehr) partielle Resultate.)
4. Der Hauptgrund ist aber ein direkter **multiplikativer** Bezug auf einen Komplex **C**, welcher bereits im Satz 7.1 implizit erschien, und welchen wir im nächsten Unterabschnitt einführen.

8.3.2. *Der Komplex **C**.*

DEFINITION 8.9. *Der Komplex $(\mathbf{C}, \frac{1}{2}d)$ ist definiert wie folgt:*

1. **C** ist in positiven Graden getragen: $\mathbf{C}_n = 0$ für $n < 0$.
2. $\mathbf{C}_0 := \bigoplus_{\mathbf{P}} \mathbf{C}_0(\mathbf{P})$, wobei

$$\mathbf{C}_0(\mathbf{P}) := \mathbf{D}_0(\mathbf{P}) = A^{\mathbf{P}, \mathbf{P}} \bigcap \text{Ker } d^c .$$

Elemente aus \mathbf{C}_0 heißen vom Typ $(0, 0||0)$.

3. $\mathbf{C}_n := \bigoplus_{\mathbf{P}} \mathbf{C}_n(\mathbf{P})$ für $n \geq 1$, wobei

$$\mathbf{C}_n(\mathbf{P}) = \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p, q \geq 0}} A^{\mathbf{P}-q, \mathbf{P}-p} .$$

Elemente aus $A^{\mathbf{P}-q, \mathbf{P}-p}$ heißen vom Typ $(p, q||0)$.

4. Das Differential ist $\frac{1}{2}d$, wobei d das Differential in A ist.

Das Produkt \wedge aus A induziert ein Produkt auf $(\mathbf{C}, \frac{1}{2}d)$, das wir auch durch \wedge bezeichnen.

8.3.3. *Die Komplexabbildung $L : (\mathbf{D}, d) \rightarrow (\mathbf{C}, \frac{1}{2}d)$. Das folgende kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{D}_0 & \xleftarrow{-\partial\bar{\partial}} & \mathbf{D}_1 & \xleftarrow{d} & \mathbf{D}_2 & \xleftarrow{\quad} & \cdots & \xleftarrow{d} & \mathbf{D}_{n-1} & \xleftarrow{d} & \mathbf{D}_n & \xleftarrow{\quad} & \cdots \\
 \parallel & & \downarrow -d^c & & \downarrow \frac{1}{2}d^c & & \downarrow \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}d^c & & \downarrow \frac{(-1)^n}{n}d^c & & \downarrow \frac{(-1)^n}{n}d^c & & \\
 \mathbf{C}_0 & \xleftarrow{\frac{1}{2}d} & \mathbf{C}_1 & \xleftarrow{\frac{1}{2}d} & \mathbf{C}_2 & \xleftarrow{\quad} & \cdots & \xleftarrow{\frac{1}{2}d} & \mathbf{C}_{n-1} & \xleftarrow{\frac{1}{2}d} & \mathbf{C}_n & \xleftarrow{\quad} & \cdots
 \end{array}$$

erklärt einen Morphismus $L : (\mathbf{D}, d) \rightarrow (\mathbf{C}, \frac{1}{2}d)$, $Lx := \frac{(-1)^n}{n}d^c x$ für $x \in \mathbf{D}_n$.

Für x vom Typ $(p, q||1)$ betrachten wir die Teile $\frac{(-1)^n}{n}\bar{\partial}x$ und $-\frac{(-1)^n}{n}\partial x$ von $Lx = \frac{(-1)^n}{n}(\bar{\partial}x \oplus -\partial x)$ als Elemente vom Typ $(p, q+1||0)$ und $(p+1, q||0)$.

8.3.4. *Die Multiplikation $\star = \mathbf{M} : \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$.*

DEFINITION 8.10. *Wir definieren eine Abbildung $\star = \mathbf{M} : \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ auf homogenen Elementen wie folgt:*

1. $x \star y = \mathbf{M}(x \otimes y) := x \wedge y$, falls x oder y in \mathbf{D}_0 liegt.
2. Für $x \in \mathbf{D}_n$ und $y \in \mathbf{D}_m$, $m, n \geq 1$ setzen wir

$$x \star y = \mathbf{M}(x \otimes y) := (-1)^n \frac{1}{n} d^c x \wedge y + x \wedge \frac{1}{m} d^c y = Lx \wedge y + (-1)^m x \wedge Ly .$$

SATZ 8.11. *L ist verträglich mit \mathbf{M} und \wedge : Für $x, y \in \mathbf{D}$ gilt*

$$L(x \star y) = Lx \wedge Ly .$$

BEWEIS: Seien $x \in \mathbf{D}_n$, $x, y \in \mathbf{D}_m$. Der Fall $n = m = 0$ ist trivial. Der Fall $n = 0, m \geq 1$ folgt wegen $d^c x = 0$. Analog, wenn $n \geq 1, m = 0$. Für $m, n \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
 L(x \star y) &= \frac{(-1)^{m+n}}{m+n} d^c \left\{ \frac{(-1)^n}{n} d^c x \wedge y + x \wedge \frac{1}{m} d^c y \right\} \\
 &= (-1)^n (-1)^m \frac{1}{n+m} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) d^c x \wedge d^c y \\
 &= Lx \wedge Ly .
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Identität benutzt:

$$(159) \quad \frac{1}{n+m} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} .$$

□

SATZ 8.12. **M** ist \mathbb{S} -kommutativ: Für $x \in \mathbf{D}_n$, $y \in \mathbf{D}_m$ gilt: $x \star y = (-1)^{nm} y \star x$.

BEWEIS: Ist m oder n gleich 0, so ist die Aussage trivial.

Sind beide m, n größer 1, so sind die A -Grade von x bzw. y gleich $n-1$ bzw. $m-1$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und die A -Grade von Lx bzw. Ly gleich n bzw. m . Es folgt:

$$\begin{aligned} y \star x &:= Ly \wedge x + (-1)^n y \wedge Lx = (-1)^{m(n-1)} x \wedge Ly + (-1)^n (-1)^{(m-1)n} Lx \wedge y \\ &= (-1)^{nm} x \star y . \end{aligned}$$

□

SATZ 8.13. **M** ist assoziativ.

BEWEIS: Seien $x \in \mathbf{D}_n$, $y \in \mathbf{D}_m$, $z \in \mathbf{D}_k$. Sind zwei oder drei Zahlen unter m, n, k gleich 0 so gilt $(x \star y) \star z = x \star (y \star z) = x \wedge y \wedge z$.

Sind $k = 0$ und $n, m \geq 1$ so gilt:

$$\begin{aligned} (x \star y) \star z &= (Lx \wedge x + (-1)^n y \wedge Lx) \star z = Lx \wedge x \wedge z + (-1)^n y \wedge Lx \wedge z , \\ x \star (y \star z) &= x \star (y \wedge z) = Lx \wedge y \wedge z + (-1)^m x \wedge L(y \wedge z) . \end{aligned}$$

Es gilt jedoch $Lx \wedge z = L(y \wedge z)$, da $d^c z = 0$. Analog können die Fälle behandelt werden, wo nur m bzw. n gleich 0 sind.

Für $n, m, k \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} (x \star y) \star z &= L(x \star y) \wedge z + (-1)^k (x \star y) \wedge Lz = (Lx \wedge Ly) \wedge z + (-1)^k (x \star y) \wedge Lz \\ &= Lx \wedge Ly \wedge z + (-1)^k Lx \wedge y \wedge Lz + (-1)^{k+m} x \wedge Ly \wedge Lz . \end{aligned}$$

und $x \star (y \star z)$ kann analog zum letzten Ausdruck gebracht werden.

□

SATZ 8.14. **M** ist verträglich mit dem Differential **d**:

$$\mathbf{M} (\mathbf{d} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{d}) = \mathbf{d} \mathbf{M} .$$

BEWEIS: Seien $x \in \mathbf{D}_n$, $y \in \mathbf{D}_m$. Der Beweis benötigt eine Fallunterscheidung:

- Der Fall $m = n = 0$ ist trivial.
- Der Fall $n = 0$, $m \geq 1$:

$$\mathbf{M} \mathbf{d}^{\otimes 2} x \otimes y = \mathbf{M} x \otimes \mathbf{d} y = x \wedge \mathbf{d} y \text{ und}$$

$$\mathbf{d} \mathbf{M} x \otimes y = \mathbf{d} (x \wedge y) = x \wedge \mathbf{d} y ,$$

da $\partial x = \bar{\partial} x = 0$ in A , $\mathbf{d} x = 0$ und x hat geraden A -Grad. Analog wird der Fall behandelt, wo $n \geq 1$, $m = 0$.

- Der Fall $n = m = 1$. So haben x, y gerade A -Grade.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mathbf{d}^{\otimes 2} x \otimes y &= \mathbf{M} (-\partial \bar{\partial} x \otimes y + x \otimes \partial \bar{\partial} y) = -\partial \bar{\partial} x \wedge y + x \wedge \partial \bar{\partial} y \\ &\quad \mathbf{d} \mathbf{M} x \otimes y \\ &= \mathbf{d} (-d^c x \wedge y + x \wedge d^c y) \\ &= \mathbf{d} \left\{ (\partial x \wedge y - x \wedge \partial y)_{(1,0||1)} \oplus (-\bar{\partial} x \wedge y + x \wedge \bar{\partial} y)_{(0,1||1)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \bar{\partial} (\partial x \wedge y - x \wedge \partial y) + \frac{1}{2} \partial (-\bar{\partial} x \wedge y + x \wedge \bar{\partial} y) . \end{aligned}$$

und die Bearbeitung des letzten Ausdrucks führt zum Ziel.

- Der Fall $n = 1, m \geq 2$. Der Typ von x ist also $(0, 0||1)$ und sei y vom Typ $(p, q||1)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \mathbf{d}^{\otimes 2} x \otimes y &= \mathbf{M} \left\{ -\partial \bar{\partial} x \otimes y - x \otimes \left(\frac{q}{n} \partial y + \frac{p}{n} \bar{\partial} y \right) \right\} \\
&= -\partial \bar{\partial} x \wedge y + d^c x \wedge \left(\frac{q}{n} \partial y + \frac{p}{n} \bar{\partial} y \right) - x \wedge \frac{1}{m-1} d^c \left(\frac{q}{n} \partial y + \frac{p}{n} \bar{\partial} y \right) \\
\mathbf{d} \mathbf{M} x \otimes y &= \mathbf{d} \left\{ -\bar{\partial} x \wedge y + \partial x \wedge y + \frac{1}{m} x \wedge \bar{\partial} y - \frac{1}{m} x \wedge \partial y \right\} \\
&= \frac{q+1}{m+1} \partial \left(-\bar{\partial} x \wedge y + \frac{1}{m} x \wedge \bar{\partial} y \right) + \frac{p}{m+1} \bar{\partial} \left(-\bar{\partial} x \wedge y + \frac{1}{m} x \wedge \bar{\partial} y \right) \\
&\quad + \frac{q}{m+1} \partial \left(\partial x \wedge y - \frac{1}{m} x \wedge \partial y \right) + \frac{p+1}{m+1} \bar{\partial} \left(\partial x \wedge y - \frac{1}{m} x \wedge \partial y \right)
\end{aligned}$$

und die beiden Ausdrücke sind gleich zu

$$-\partial \bar{\partial} x \wedge y + (\bar{\partial} - \partial) x \wedge \left(\frac{q}{n} \partial y + \frac{p}{n} \bar{\partial} y \right) + \frac{1}{n} x \wedge \partial \bar{\partial} y.$$

Analog kann auch der Fall $n \geq 1, m = 1$ behandelt werden. (Oder man nutzt die $\mathbf{\$}$ -Kommutativität von \mathbf{M} aus.)

- Es bleibt der Fall: x ist vom Typ $(p, q||1)$ y ist vom Typ $(s, t||1)$

$$\begin{aligned}
x \otimes y &\xrightarrow{\mathbf{d}^{\otimes 2}} \frac{q}{n} \partial x \otimes y + \frac{p}{d} \bar{\partial} x \otimes y + (-1)^n x \otimes \frac{t}{m} \partial y + (-1)^n x \otimes \frac{s}{m} \bar{\partial} y \\
&\xrightarrow{\mathbf{M}} (-1)^{n-1} \frac{q}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \bar{\partial} \partial x \wedge y + 0 + \frac{q}{n} \partial x \wedge \frac{1}{m} \bar{\partial} y - \frac{q}{n} \partial x \wedge \frac{1}{m} \partial y \\
&\quad + 0 - (-1)^{n-1} \frac{p}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \partial \bar{\partial} x \wedge y + \frac{p}{n} \bar{\partial} x \wedge \frac{1}{m} \bar{\partial} y - \frac{p}{n} \bar{\partial} x \wedge \frac{1}{m} \partial y \\
&\quad + \frac{1}{n} \bar{\partial} x \wedge \frac{t}{m} \partial y - \frac{1}{n} \partial x \wedge \frac{t}{m} \partial y + (-1)^n x \wedge \frac{t}{m} \cdot \frac{1}{m-1} \bar{\partial} \partial y + 0 \\
&\quad + \frac{1}{n} \bar{\partial} x \wedge \frac{s}{m} \bar{\partial} y - \frac{1}{n} \partial x \wedge \frac{s}{m} \bar{\partial} y + 0 + (-1)^n x \wedge \frac{s}{m} \cdot \frac{1}{m-1} (-\partial \bar{\partial} y) \\
&= (-1)^n \frac{1}{n} \bar{\partial} \partial x \wedge y - (-1)^n \frac{1}{m} x \wedge \partial \bar{\partial} y + \frac{q-s}{nm} \partial x \wedge \bar{\partial} y + \frac{t-p}{nm} \bar{\partial} x \wedge \partial y - \frac{q+t}{nm} \partial x \wedge \partial y + \frac{p+s}{nm} \bar{\partial} x \wedge \bar{\partial} y \\
x \otimes y &\xrightarrow{\mathbf{M}} (-1)^n \frac{1}{n} \bar{\partial} x \wedge y - (-1)^n \frac{1}{n} \partial x \wedge y + x \wedge \frac{1}{m} \bar{\partial} y - x \wedge \frac{1}{m} \partial y \\
&\xrightarrow{\mathbf{d}} \frac{q+t+1}{n+m} \partial \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \bar{\partial} x \wedge y + x \wedge \frac{1}{m} \bar{\partial} y \right\} - \frac{p+s}{n+m} \bar{\partial} \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \bar{\partial} x \wedge y + x \wedge \frac{1}{m} \bar{\partial} y \right\} \\
&\quad - \frac{q+t}{n+m} \partial \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \partial x \wedge y - x \wedge \frac{1}{m} \partial y \right\} - \frac{p+s+1}{n+m} \bar{\partial} \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \partial x \wedge y - x \wedge \frac{1}{m} \partial y \right\}
\end{aligned}$$

und man kann den letzten Ausdruck leicht berechnen. Der Koeffizient von $\bar{\partial} x \wedge \partial y$ ist zum Beispiel:

$$\left(\frac{q+1+t}{n+m} \cdot \frac{1}{n} - \frac{p+s+1}{n+m} \cdot \frac{1}{m} \right) = \frac{n-p+t}{(n+m)n} - \frac{p+m-t}{(n+m)m} = \frac{t-p}{n+m} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)$$

und nun kann die "wichtige" Relation (159) angewandt werden. \square

8.4. Der CHERN-Charakter mit Werten in den Komplexen \mathbf{D} und \mathbf{C} .

DEFINITION 8.15. Sei X eine Varietät. **Der CHERN-Charakter mit Werten im Komplex \mathbf{D} .** ist die Abbildung:

$$ch_{\mathbf{D}} : \Xi.(X) \rightarrow \mathbf{D}.(A_X),$$

welche auf Basis-Elementen vom Grad n der Form $\xi = \xi^{[n]} = (E^{\bullet[n]}, \mathbf{v}^{\bullet[n]}, h^{\bullet[n]})$ durch die Relation erklärt wird:

$$(160) \quad ch_{\mathbf{D}}(\xi) := \begin{cases} \mathbf{\$} \exp((\nabla^c)^2) \mathbf{\$} & \text{für } n = 0 \\ \text{reg f} \mathbf{\$} \exp((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} \mathbf{\$} & \text{für } n > 0. \end{cases}$$

Wir benutzen dabei die üblichen Notationen aus diesem Kapitel. Das regularisierte Integral reg f wird auf $\mathbb{R}_{>0}^n$ bezüglich des Deformations-Parameters \mathbf{t} gebildet, welcher implizit in dem deformierten d^c -derivativen Operator ∇^c und in dem Nummeroperator \mathbf{N} eingeht.

Wir betrachten für $n = 0$ den Ausdruck $\mathbf{\$} \exp((\nabla^c)^2) \mathbf{\$}$ in der direkten Summe der Summanden $A^{\mathbf{P}, \mathbf{P}}$. Er liegt im Kern von d^c also auch in \mathbf{D}_0 .

Der Ausdruck $\$ \exp((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \mathbf{N} \$$, entsteht, nachdem wir Operationen in $A(\text{End}(E))$ durchführen und vom Resultat die Spur bilden. Er nimmt als Differentialform in $A = A_X$ Werte in der direkten Summe von Summanden der Form

$$A^{p-q-1, p-p-1}, \quad \text{für alle positiven } p, q \text{ mit } p + q + 1 = n$$

und wir identifizieren den Summanden $A^{p-q-1, p-p-1}$ mit Elementen vom Typ $(p, q|1)$ aus $\mathbf{D}_n(\mathbf{P})$.

Der CHERN-Charakter mit Werten in dem Komplex \mathbf{C} . ist die Abbildung:

$$\text{ch}_{\mathbf{C}} : \Xi(X) \rightarrow \mathbf{C}(A_X),$$

welche auf Basis-Elementen vom Grad n der Form $\xi = \xi^{[n]} = (E^{\bullet[n]}, \mathbf{v}^{\bullet[n]}, h^{\bullet[n]})$ durch die Relation erklärt wird:

$$\text{ch}_{\mathbf{C}}(\xi) := \text{reg} \int \$ \exp((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \$$$

mit den gleichen Konventionen wie oben.

Der Ausdruck $\$ \exp((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \$$, entsteht, nachdem wir Operationen in $A(\text{End}(E))$ durchführen und vom Resultat die Spur bilden. Er nimmt als Differentialform in $A = A_X$ Werte in der direkten Summe von Summanden der Form

$$A^{p-q, p-p}, \quad \text{für alle positiven } p, q \text{ mit } p + q = n$$

und wir identifizieren den Summanden $A^{p-q, p-p}$ mit Elementen vom Typ $(p, q|0)$ aus $\mathbf{C}_n(\mathbf{P})$.

THEOREM 8.16. Sei X eine projektive Varietät.

Die CHERN-Charakter $\text{ch}_{\mathbf{D}}$ und $\text{ch}_{\mathbf{C}}$ sind wohldefiniert (in Bezug auf Konvergenzprobleme) und haben die Eigenschaften:

1. Sie sind Komplex-Abbildungen:

$$\mathbf{d} \text{ch}_{\mathbf{D}}(\xi) = \text{ch}_{\mathbf{D}}(\partial \xi) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \mathbf{d} \text{ch}_{\mathbf{C}}(\xi) = \text{ch}_{\mathbf{C}}(\partial \xi).$$

2. Sie sind verträglich mit \oplus und $+$: Es gilt auf Basis-Elementen:

$$\text{ch}_{\mathbf{D}}(\xi_1 \oplus \xi_2) = \text{ch}_{\mathbf{D}}(\xi_1) + \text{ch}_{\mathbf{D}}(\xi_2) \quad \text{und} \quad \text{ch}_{\mathbf{C}}(\xi_1 \oplus \xi_2) = \text{ch}_{\mathbf{C}}(\xi_1) + \text{ch}_{\mathbf{C}}(\xi_2).$$

3. Sie sind verträglich mit den Produktstrukturen:

$$\text{ch}_{\mathbf{D}}(\xi_1 \otimes \xi_2) = \text{ch}_{\mathbf{D}}(\xi_1) \star \text{ch}_{\mathbf{D}}(\xi_2) \quad \text{und} \quad \text{ch}_{\mathbf{C}}(\xi_1 \otimes \xi_2) = \text{ch}_{\mathbf{C}}(\xi_1) \wedge \text{ch}_{\mathbf{C}}(\xi_2).$$

4. $\text{ch}_{\mathbf{D}}$ und $\text{ch}_{\mathbf{C}}$ verschwinden auf ausgearteten Elementen.

5. Der Morphismus L führt sie ineinander:

$$L \text{ch}_{\mathbf{D}}(\xi) = \text{ch}_{\mathbf{C}}(\xi).$$

(Insbesondere können die obigen Eigenschaften von $\text{ch}_{\mathbf{C}}$ aus den entsprechenden Eigenschaften von $\text{ch}_{\mathbf{D}}$ abgeleitet werden.)

BEWEIS:

- Die Verträglichkeit mit den Differentialen folgt aus den Transgressions-Formeln.
- Die Verträglichkeit mit \oplus und $+$ folgt analog zu dem Beweis von 7.1.
- Die Verträglichkeit mit Produktstrukturen folgt aus dem Lemma 8.6 und aus den Argumenten aus dem Abschnitt, wo sich dieses Lemma befindet.
- Ein ausgeartetes Basis-Element aus $\Xi(X)$ ist der Form $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow (E^{\bullet}, h^{\bullet}) = (E^{\bullet}, h^{\bullet}) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$ für ein Basis-Element von der Dimension um 1 niedriger als E in einer Darstellung bezüglich einer geeigneter Richtung. Wir können annehmen, daß diese die erste Richtung ist, und für das obige ausgeartete Basis-Element mit der Darstellung arbeiten:

$$[\cdots \rightarrow 0 \rightarrow (T, h_T) = (T, h_T) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots] \otimes (E^{\bullet}, h^{\bullet}).$$

Dabei sind T das triviale Bündel auf X , das neutrale Element für das Produkt \otimes , und h_T die triviale, konstante Metrik auf T . Es reicht zu zeigen, daß $\text{ch}_{\mathbf{D}}$ auf $[\cdots \rightarrow 0 \rightarrow (T, h_T) = (T, h_T) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots]$ verschwindet.

Der induzierte metrische Zusammenhang ist $d : A \rightarrow A$ und es gilt $d^2 = 0$. Auch $\$$ -kommutiert d mit dem Differential, welches die Identität oder eine Nullabbildung ist. Der Term $\exp((\nabla^c)^2)\mathbf{N}$ wird zu $\exp(-(\mathbf{v}\mathbf{v}^* + \mathbf{v}^*\mathbf{v}))\mathbf{N} = \exp(-t \cdot \text{Identität})\mathbf{N}$.

Die Argumentation ist durch die Bemerkung beendet, daß das regularisierte Integral der Abbildung $t \rightarrow t^{-1} \exp(-t)$ verschwindet.

- $L \text{ch}_{\mathbf{D}} = \text{ch}_{\mathbf{C}}$ aus Lemma 8.6.

□

Höhere Chern–Charaktere

Wir haben im letzten Kapitel eine Verallgemeinerung der Formel des CHERN–Charakters gegeben für ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ durch die Spur von $\exp -\frac{1}{2\pi i} \nabla^2$. In diesem Kapitel skizzieren wir sehr kurz eine Möglichkeit, die parallele Formel 163 für die CHERN–Klassen zu übertragen. Dies ist möglich durch den flexiblen superalgebraischen Formalismus, wo die Betonung dieses Kapitels auch liegt.

1. Superlineare Algebra

Das Symbol \otimes steht auch des weiteren für das Supertensorprodukt. Sei k ein superkommutativer Ring. Sei H ein k –Supermodul. Wir definieren:

$$\mathbb{T}^p H := H^{\otimes p} / \text{Relationen} ,$$

wobei die Relationen

$$(161) \quad x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_p - \epsilon(x, \sigma) x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(p)}$$

die übliche Vorzeichenkonvention durch den entsprechenden Kozykel $\epsilon(x, \sigma)$ einbauen. Die Definition von ϵ ist induktiv. Für Transpositionen $(i, i+1)$ soll gelten: $\epsilon(x, (i, i+1)) := (-1)^{|x_i||x_{i+1}|}$. Die symmetrische Gruppe agiert von rechts auf Abbildungen $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow H$, also von rechts auch auf $H^{\otimes p}$ durch $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_p \rightarrow x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(p)}$. Das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\epsilon(x, \sigma) \cdot \sigma} & \epsilon(x, \sigma) \cdot x^\sigma \\ & \searrow \epsilon(x, \sigma \tau) \cdot \sigma \tau & \downarrow \epsilon(x^\sigma, \tau) \cdot \tau \\ & & \epsilon(x, \sigma \tau) \cdot x^{(\sigma \tau)} = \epsilon(x, \sigma) \cdot \epsilon(x^\sigma, \tau) \cdot (x^\sigma)^\tau \end{array}$$

kodiert die Kozykelrelation $\epsilon(x, \sigma \tau) = \epsilon(x, \sigma) \cdot \epsilon(x^\sigma, \tau)$ und erklärt die Erweiterung der Vorzeichenregel auf beliebige Permutationen. Die explizite Form des Kozykels folgt unter Berücksichtigung der Vorzeichen sämtlicher Inversionen einer Permutation σ . Sie ist gegeben durch:

$$\epsilon(x, \sigma) = (-1)^{\left[\sum_{\substack{i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} |x_i||x_j| \right]}$$

Wir haben eine surjektive, nicht injektive Abbildung

$$\mathbb{T}^p H \otimes \mathbb{T}^q H \longrightarrow \mathbb{T}^{p+q} H ,$$

die eine \mathbb{T} –Algebra

$$\mathbb{T}^\bullet H := \bigoplus_p \mathbb{T}^p H$$

definiert. Seien nun A_1, A_2, \dots, A_p Endomorphismen von H . Die übliche Vorzeichenregel definiert einen Endomorphismus:

$$\begin{aligned} A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_p : H^{\otimes p} &\longrightarrow H^{\otimes p} \quad \text{induktiv durch:} \\ (A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_p)(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_p) \\ &:= (-1)^{|A_2 \otimes \cdots \otimes A_p||x_1|} A_1 x_1 \otimes (A_2 \otimes \cdots \otimes A_p)(x_2 \otimes \cdots \otimes x_p) \\ &\text{also allgemein: } = (-1)^{\sum_{i < j} |A_j||x_i|} A_1 x_1 \otimes A_2 x_2 \otimes \cdots \otimes A_p x_p \end{aligned}$$

Wir können dies kompakt in der Form:

$$A x = \epsilon(A \otimes x, T) \cdot A_1 x_1 \otimes \cdots \otimes A_p x_p$$

darstellen, wobei T die entsprechende Permutation der verdoppelten Indexmenge

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p & ; & 1' & 2' & \dots & (p-1)' & p' \\ 1 & 1' & \dots & & & & & \dots & p & p' \end{pmatrix}$$

ist.

Wir können nicht erwarten, daß $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_p$ die Relationen stabilisiert. Es gilt zum Beispiel: $A_1 \otimes A_2(x_1 \otimes x_2 \pm x_2 \otimes x_1) = \pm A_1 x_1 \otimes A_2 x_2 \pm A_1 x_2 \otimes A_2 x_1$. Es ist notwendig, Symmetrisatoren einzuführen und entsprechend einen Unterraum von Endomorphismen von $H^{\otimes p}$ zu isolieren. Wir definieren:

$$\text{symm} : \text{End}(H)^{\otimes p} \longrightarrow \text{End}(H)^{\otimes p} \quad \text{durch:}$$

$$\text{symm}(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_p) := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} \epsilon(A, \sigma) A_{\sigma(1)} \otimes A_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes A_{\sigma(p)},$$

und betrachten den Raum der supersymmetrisierten Endomorphismen:

$$(162) \quad \mathcal{S}ym^p \text{End}(H) := \text{Bild}(\text{symm} : \text{End}(H)^{\otimes p} \longrightarrow \text{End}(H)^{\otimes p}).$$

Es gilt $\text{symm}^2 = \text{symm}$ als Korollar zur Kozykelrelation:

$$\text{symm}^2(A) = \frac{1}{(p!)^2} \sum_{\sigma, \tau} \epsilon(A, \sigma) \cdot \epsilon(A^{\sigma}, \tau) \cdot A^{\sigma\tau} = \frac{1}{(p!)^2} \sum \epsilon(A, \sigma\tau) \cdot A^{\sigma\tau} = \text{symm}(A)$$

LEMMA 1.1. *Der Raum (162) ist stabil bezüglich Verknüpfung von Endomorphismen.*

BEWEIS: Seien $A = A_1 \otimes \cdots \otimes A_p$ und $B = B_1 \otimes \cdots \otimes B_p$ aus $\text{End}(H)^{\otimes p}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{symm}(A) \cdot \text{symm}(B) &= \sum_{\sigma, \tau} \epsilon(A, \sigma) \epsilon(B, \tau\sigma) A^{\sigma} \cdot B^{\tau\sigma} \\ &= \sum_{\sigma, \tau} \epsilon(A, \sigma) \epsilon(B, \tau) \epsilon(B^{\tau}, \sigma) \epsilon(A^{\sigma} \otimes B^{\tau\sigma}, T) A_{\sigma(1)} B_{\sigma(1)}^{\tau} \otimes \cdots \otimes A_{\sigma(p)} B_{\sigma(p)}^{\tau} \end{aligned}$$

Sei $\sigma \cup \sigma$ die Permutation $i \rightarrow \sigma(i)$, $i' \rightarrow \sigma(i)'$. Dann ist $\epsilon(A^{\sigma} \otimes B^{\tau\sigma}, T) = \epsilon((A \otimes B^{\tau})^{\sigma \cup \sigma}, T) = \epsilon(A \otimes B^{\tau}, (\sigma \cup \sigma)T) \cdot \epsilon(A \otimes B^{\tau}, \sigma \cup \sigma)^{-1}$. Wir können die Rechnung fortsetzen:

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma, \tau} \epsilon(B, \tau) \epsilon(A \otimes B^{\tau}, (\sigma \cup \sigma)T) (A_1 B_1^{\tau} \otimes \cdots \otimes A_p B_p^{\tau})^{\sigma} \\ &= \sum_{\tau} \epsilon(B, \tau) \epsilon(A \otimes B^{\tau}, T) \sum_{\sigma} \epsilon(A_1 B_1^{\tau} \otimes \cdots \otimes A_p B_p^{\tau}, \sigma) \cdot (A_1 B_1^{\tau} \otimes \cdots \otimes A_p B_p^{\tau})^{\sigma}, \end{aligned}$$

weil $\epsilon(A \otimes B^{\tau}, (\sigma \cup \sigma)T)$ das Vorzeichen ist, das dem Übergang von $A \otimes B^{\tau}$ zu $A_{\sigma(1)} B_{\sigma(1)}^{\tau} \otimes \cdots \otimes A_{\sigma(p)} B_{\sigma(p)}^{\tau}$ entspricht. Betrachte nun $A_1 \otimes B_1^{\tau} \otimes \cdots \otimes A_p \otimes B_p^{\tau}$ als Zwischenstation(en). \square

LEMMA 1.2. *Jeder Endomorphismus $A \in \mathcal{S}ym^p \text{End}(H)$ stabilisiert die Relationen (161).*

BEWEIS: Analog. Seien $A = A_1 \otimes \cdots \otimes A_p$ und $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$. Es gilt sukzessive:

$$\begin{aligned} \text{symm}(A) \cdot \epsilon(x, \tau) x &= \sum_{\sigma} \epsilon(A, \sigma\tau) \epsilon(x, \tau) A^{\sigma\tau} \cdot x^{\tau} \\ &= \sum_{\sigma} \epsilon(A, \sigma) \epsilon(A^{\sigma}, \tau) \epsilon(x, \tau) \epsilon(A^{\sigma\tau} \otimes x^{\tau}, T) A_{\sigma(1)}^{\tau} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes A_{\sigma(p)}^{\tau} x_{\sigma(p)} \\ &= \sum_{\sigma} \epsilon(A, \sigma) \epsilon(A^{\sigma}, \tau) \epsilon(x, \tau) \epsilon((A^{\sigma} \otimes x)^{\tau \cup \tau}, T) (A_{\sigma(1)}^{\tau} x_1 \otimes \cdots \otimes A_{\sigma(p)}^{\tau} x_p)^{\tau} \end{aligned}$$

Es gilt $\epsilon((A^{\sigma} \otimes x)^{\tau \cup \tau}, T) = \epsilon(A^{\sigma} \otimes x, (\tau \cup \tau)T) \epsilon(A^{\sigma} \otimes x, (\tau \cup \tau))^{-1} = \epsilon(A^{\sigma} \otimes x, (\tau \cup \tau)T) \epsilon(A^{\sigma}, \tau)^{-1} \epsilon(x, \tau)^{-1}$. Wir können diese Berechnung abschließen:

$$= \sum_{\sigma} \epsilon(A, \sigma) \epsilon(A^{\sigma} \otimes x, T) \epsilon(A_{\sigma(1)}^{\tau} x_1 \otimes \cdots \otimes A_{\sigma(p)}^{\tau} x_p, \tau) (A_{\sigma(1)}^{\tau} x_1 \otimes \cdots \otimes A_{\sigma(p)}^{\tau} x_p)^{\tau}.$$

Ein Supersymmetrisator bildet dann Relationen in Relationen ab:

$$\text{symm}(A) \{x - \epsilon(x, \tau) x^{\tau}\} = \sum_{\sigma} \epsilon(A, \sigma) \epsilon(A^{\sigma} \otimes x, T) \{y_{\sigma} - \epsilon(y_{\sigma}, \tau) (y_{\sigma})^{\tau}\},$$

wobei $y_\sigma = A^\sigma_1 x_1 \otimes \cdots \otimes A^\sigma_p x_p$. \square

Der Raum $\mathcal{T}^p H$ ist kanonisch ein Superraum: Die Relationen sind homogen. Fassen wir einen Endomorphismus $A \in \mathcal{S}ym^p \text{End}(H)$ als Endomorphismus von $\mathcal{T}^p H$ auf, so können wir die entsprechende Superspur einführen:

$$\mathcal{S} A \mathcal{S} := \mathcal{S} \text{Faktorisierung}(A) : \mathcal{T}^p \longrightarrow \mathcal{T}^p \mathcal{S}.$$

Der folgende Satz legt die Eigenschaften von Supersymmetrisatoren der k -Superderivationen eines k -Supermoduls H fest:

SATZ 1.3. *Sei $(k, +, \cdot, d)$ eine superkommutative Differentialalgebra. Es gilt insbesondere $d^2 = 0$. Sei D ein d -superderivativer Operator auf dem superfreien k -Supermodul H . Dann ist*

$$D_{\otimes p} := D \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes D \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes D$$

die induzierte superderivation auf $H^{\otimes p}$. Sie stabilisiert die Relationen (161) und induziert einen d -superderivativen Operator auf $\mathcal{T}^p(H)$. Aus diesem Grund gilt auch die Ableitungsformel:

$$d \mathcal{S} A \mathcal{S} = \mathcal{S} [D_{\otimes p}, A] \mathcal{S}$$

für alle $A \in \mathcal{S}ym^p \text{End}(H)$. \square

2. Nullte CHERN-Formen

Wir formulieren zuerst auf bekannte Weise die Definition der CHERN-Formen in der DE RHAM-Kohomologie, die sich in unserem Fall verallgemeinern läßt.

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Sei $\xi = (E, h)$ ein holomorphes metrisiertes Bündel, gesehen als triviales Superbündel. Sei ∇ der metrische Zusammenhang. Dann ist:

$$(163) \quad c_{0,p}(\xi) := \text{Spur} \left(\bigwedge^p \left(-\frac{1}{2\pi i} \nabla^2 \right) \right)$$

die p -te CHERN-Form. Wir geben dafür folgende Umformung:

$$\begin{aligned} c_{0,p}(\xi) &= \mathcal{S} \left[\left(-\frac{1}{2\pi i} \nabla^2 \right)^{\otimes p} : A^+(\bigwedge^p E) \longrightarrow A^{+2p}(\bigwedge^p E) \right] \mathcal{S} \\ &= \mathbf{Proj} \frac{1}{(2\pi i)^p} \mathcal{S} \left[\left(\varphi(-\nabla^2) \right)^{\otimes p} : A^+(\bigwedge^p E) \longrightarrow A^{+2p}(\bigwedge^p E) \right] \mathcal{S}. \end{aligned}$$

φ ist dabei ein Polynom oder allgemeiner eine reell analytische Funktion mit den ersten zwei TAYLOR-Koeffizienten $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$. Das Funktionalkalkül $\varphi(-\nabla^2)$ von dem nilpotenten Krümmungsoperator ist wohldefiniert. Die Projektion **Proj** isoliert den Grad $2p$ vom letzten Ausdruck. Die Operatoren $\left(-\frac{1}{2\pi i} \nabla^2\right)^{\otimes p}$ und $\left(\varphi(-\nabla^2)\right)^{\otimes p}$ sind supersymmetrisierend und faktorisieren über $\bigwedge^p E$. (Wir ziehen vor, $\left(\varphi(-\nabla^2)\right)^{\otimes p}$ statt z.B. $\left(\varphi(-\nabla^2)\right)^{\wedge p}$ zu schreiben.)

3. Transgression der CHERN-Formen

Wir arbeiten in diesem Abschnitt mit folgenden Konventionen:

Für ein (Super-)Vektorbündel E bezeichnen wir durch $\bigwedge^p E$ das Objekt $\bigwedge^p(!E)$. (Dabei vergessen wir vollständig die $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung von E , und es entsteht $(!E)$ durch diesen Vergiß-Funktor $!$. Es unterscheiden sich also $\bigwedge^p E$ und die \mathcal{T}^p -Konstruktion auf dem oppositen Bündel E^{opp} .)

Die Superspur auf $\bigwedge^p E$ bezieht sich anschließend auf die kanonische von E induzierte $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung.

3.1. Erste Transgression im trinkierten DOLBEAULT-Komplex. Sei $\xi^{\bullet[1]} = (E^{\bullet[1]}, v^{\bullet[1]}, h^{\bullet[1]})$ ein 1-Multikomplex von holomorphen Bündeln.

Sei $\nabla = \nabla'' + \nabla'$ der entsprechende deformierte \mathbb{S} -Zusammenhang. Der Deformationsparameter ist $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$.

Aus der Gleichheit:

$$\left(d_{\mathbf{t}} - \frac{1}{2}d \right) \mathbb{S} \varphi((\nabla^c + \mathbf{N})^2)^{\otimes p} \mathbb{S} = \mathbb{S} \left[\left(d_{\mathbf{t}} - \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{2}\mathbf{N} \right)_{\otimes p}, \varphi((\nabla^c + \mathbf{N})^2)^{\otimes p} \right] \mathbb{S} = 0$$

folgt:

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{t}} \mathbb{S} \varphi(-\nabla^2)^{\otimes p} \mathbb{S} &= d_{\mathbf{t}} \mathbf{Proj}_{\Lambda^0} \mathbb{S} \varphi((\nabla^c + \mathbf{N})^2)^{\otimes p} \mathbb{S} \\ &= \mathbf{Proj}_{\Lambda^1} \frac{1}{2}d \mathbb{S} \varphi((\nabla^c + \mathbf{N})^2)^{\otimes p} \mathbb{S} \\ &= \frac{1}{2}d \mathbb{S} \sum_{p_1+p_2=p-1} \varphi(-\nabla^2)^{\otimes p_1} \otimes \mathbf{Proj}_{\Lambda^1} \varphi((\nabla^c + \mathbf{N})^2) \otimes \varphi(-\nabla^2)^{\otimes p_2} \mathbb{S} \end{aligned}$$

Im Polynomialfall $\varphi(x) = x^k$ ist der mittlere Tensorfaktor gleich zu: $\sum_{k_1+k_2=k-1} (\nabla^c)^{2k_1} [\nabla^c, \mathbf{N}] (\nabla^c)^{2k_2} =$

$$\begin{aligned} \left[\nabla^c, \sum_{k_1+k_2=k-1} (\nabla^c)^{2k_1} \mathbf{N} (\nabla^c)^{2k_2} \right] &= \left[\nabla^c, \mathbf{Proj}_{\Lambda^1} ((\nabla^c)^2 + \mathbf{N})^2 \right] \text{ so daß wir die Rechnung fortsetzen können:} \\ &= \frac{1}{2}d \mathbb{S} \sum_{p_1+p_2=p-1} \varphi(-\nabla^2)^{\otimes p_1} \otimes \left[\nabla^c, \mathbf{Proj}_{\Lambda^1} \varphi((\nabla^c)^2 + \mathbf{N}) \right] \otimes \varphi(-\nabla^2)^{\otimes p_2} \mathbb{S} \\ &= \frac{1}{2}d \mathbf{Proj}_{\Lambda^1} \mathbb{S} \sum \varphi((\nabla^c)^2 + \mathbf{N})^{\otimes p_1} \otimes [\nabla^c, \varphi((\nabla^c)^2 + \mathbf{N})] \otimes \varphi((\nabla^c)^2 + \mathbf{N})^{\otimes p_2} \mathbb{S} \\ &= \mathbf{Proj}_{\Lambda^1} \frac{1}{2}d \mathbb{S} [(\nabla^c)_{\otimes p}, \varphi((\nabla^c)^2 + \mathbf{N})^{\otimes p}] \mathbb{S} \\ &= \mathbf{Proj}_{\Lambda^1} \frac{1}{2}dd^c \mathbb{S} \varphi((\nabla^c)^2 + \mathbf{N})^{\otimes p} \mathbb{S} . \end{aligned}$$

3.2. Höhere Transgression in dem trinkierten DOLBEAULT-Komplex.

Sei $\xi^{\bullet[n+1]} = (E^{\bullet[n+1]}, v^{\bullet[n+1]}, h^{\bullet[n+1]})$ ein $(n+1)$ -Multikomplex von holomorphen Bündeln. Sei ∇ der Superzusammenhang zu dem Deformationsparameter $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_{>0}^{n+1}$. Wir werden transgressiv

$$(164) \quad d_{\mathbf{t}} \mathbf{Proj}_{\Lambda^n \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{D}_n^{\mathbb{C}}(A)} \mathbb{S} \varphi(\nabla^{c^2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] + \mathbf{N})^{\otimes p} \mathbb{S}$$

untersuchen. Wir fangen die Rechnung wie folgt an:

$$\begin{aligned} \left(d_{\mathbf{t}} - \frac{1}{2}d \right) \mathbb{S} \varphi(\nabla^{c^2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] + \mathbf{N})^{\otimes p} \mathbb{S} &= \mathbb{S} \left[\left(d_{\mathbf{t}} - \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{2}\mathbf{N} \right)_{\otimes p}, \varphi(\nabla^{c^2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] + \mathbf{N})^{\otimes p} \right] \mathbb{S} = \\ \mathbb{S} \sum_{p_1+p_2=p-1} \varphi(\nabla^{c^2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] + \mathbf{N})^{\otimes p_1} \otimes \left[d_{\mathbf{t}} - \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{2}\mathbf{N}, \varphi(\nabla^{c^2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] + \mathbf{N}) \right] \otimes \varphi(\nabla^{c^2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] + \mathbf{N})^{\otimes p_2} \mathbb{S} \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Projektion auf den Typ $\Lambda^{n+1} \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{D}_n^{\mathbb{C}}(A)$. Ist φ polynomial: $\varphi(x) = x^k$, so können wir explizit die Verteilung der Bausteine $(\nabla^c)^2$, $[\nabla^c, \mathbf{N}]$ und \mathbf{N} untersuchen: Nach dem Ausklammern erscheinen in jedem nichtkommutativen Monom:

- einmal der Operator \mathbf{N} ,
- n Mal der Kommutator $[\nabla^c, \mathbf{N}]$ und
- sonst die negative Krümmung $(\nabla^c)^2$.

Pflücken wir den Operator \mathbf{N} aus $\varphi(\nabla^{c^2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] + \mathbf{N})^{\otimes p_i}$ in der obigen Summe, so erscheint er nicht mehr in dem mittleren Tensorfaktor. Dieser Kommutator wird zu:

$$\left[d_{\mathbf{t}} - \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{2}\mathbf{N}, \varphi(\nabla^{c^2} + [\nabla^c, \mathbf{N}]) \right] = 0 \quad \text{wegen (115).}$$

Wählen wir nun \mathbf{N} aus dem mittleren Tensorfaktor, so entsteht folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \mathbb{S} \sum_{p_1+p_2=p-1} \varphi \left(\nabla^{c2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] \right)^{\otimes p_1} \otimes \left[d_t - \frac{1}{2} \nabla + \frac{1}{2} \mathbf{N}, \varphi \left(\nabla^{c2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] + \mathbf{N} \right) \right] \otimes \varphi \left(\nabla^{c2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] \right)^{\otimes p_2} \mathbb{S} , \\ (165) \end{aligned}$$

welcher in der Mitte im Fall $\varphi(x) = x^k$ weiter bearbeitet werden kann, berücksichtigen wir nur den Anteil, der nach der Projektion überlebt:

$$\begin{aligned} & \left[d_t - \frac{1}{2} \nabla + \frac{1}{2} \mathbf{N}, \sum_{k_1+k_2=k-1} \left(\nabla^{c2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] \right)^{k_1} \mathbf{N} \left(\nabla^{c2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] \right)^{k_2} \right] \\ &= \sum_{k_1+k_2=k-1} \left(\nabla^{c2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] \right)^{k_1} \left(-\frac{1}{2} [\nabla^c, \mathbf{N}] \right) \left(\nabla^{c2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] \right)^{k_2} \\ &= \text{Proj}_{\epsilon \text{ im Grad Eins}} \varphi \left(\nabla^{c2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] - \frac{1}{2} \epsilon [\nabla, \mathbf{N}] \right)^{\otimes p} , \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck sinnvoll ist, tensorieren wir über \mathbb{C} mit $\mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^2$, und die Projektion in der Zerlegung $\mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\epsilon$ auf den zweiten Summanden genommen wird. Der Ausdruck (165) nimmt die Gestalt an:

$$\text{Proj}_{\epsilon \text{ im Grad Eins}} \mathbb{S} \varphi \left(\nabla^{c2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] - \frac{1}{2} \epsilon [\nabla, \mathbf{N}] \right)^{\otimes p} \mathbb{S} ,$$

welche keinen Beitrag nach Projektion auf $\bigwedge^{n+1} \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{D}_n^{\mathbb{C}}(A)$ liefert.

4. Höhere CHERN-Formen

Wir sind nun in der Lage eine explizite Formel für die höheren CHERN-Formen zu geben. Es gilt:

$$c_{k,p} = \frac{1}{(2\pi i)^k} \text{Proj}_{\mathfrak{D}_k^{\mathbb{C}}(A,p)} \frac{1}{2^{k-1}} \text{reg} \int_{(0,\infty)^k} \mathbb{S} \varphi \left(\nabla^{c2} + [\nabla^c, \mathbf{N}] + \mathbf{N} \right)^{\otimes p} \mathbb{S} ,$$

für $k \geq 1$. Arbeiten wir modulo $\frac{1}{(2\pi i)^k} \mathbb{Q}^\times$ im Bezug auf $c_{k,p}$, so gilt:

$$c_{2p-1,p}(\xi) \sim \frac{1}{(2\pi i)^p} \mathbb{Q}^\times \text{reg} \int_{(0,\infty)^{2p-1}} \mathbb{S} \varphi \left(-(\mathbf{v}\mathbf{v}^* + \mathbf{v}^*\mathbf{v}) - (\mathbf{V} + \mathbf{V}^*) + \mathbf{N} \right)^{\otimes p} \mathbb{S} .$$

Die Operatoren $\mathbf{v}\mathbf{v}^* + \mathbf{v}^*\mathbf{v}$, $\mathbf{V} + \mathbf{V}^*$ und \mathbf{N} superkommutieren untereinander.

Werte des Chern–Charakters

Dieses Kapitel beinhaltet einfache, elementare Berechnungen.

1. Aufgabenstellung

Sei $\mathbf{E} := (E^{\bullet[n]}, v^{\bullet[n]}, h^{\bullet[n]})$ ein exakter Multikomplex mit einer **ungeraden** Anzahl $n = 2p - 1 = 2q + 1$ von Richtungen. (Diese ist eine Definition der Zahlen p und q für eine einfachere Abfrage.)

Wir berechnen den Anteil von $\text{ch}(\mathbf{E})$, welcher aus Differentialformen vom Grad 0 besteht, also vom Typ $(p, p|1)$ ist. Dieser befindet sich in $\mathfrak{D}^{\mathbb{C},1}(p) = \mathfrak{D}_{2p-1}^{\mathbb{C}}(p)$, deswegen schreiben wir $\text{ch}(\xi, p)$ für diesen Anteil. Wir werden alternativ mit dem Komplex \mathbf{D} arbeiten.

Für $\text{ch}(\xi, p)$ entfällt die Berücksichtigung des metrischen Zusammenhangs in der Formel (160), und wir erreichen den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \text{ch}_{\mathbf{D}}(\xi, p) &= \text{reg} \int \mathbb{S} \exp \left((\mathbf{v} - \mathbf{v}_t^* + \mathbf{N})^2 \right) \mathbf{N} \mathbb{S} \\ &= \text{reg} \int \mathbb{S} \exp \left(-(\mathbf{v}\mathbf{v}_t^* + \mathbf{v}_t^*\mathbf{v}) + [\mathbf{v} - \mathbf{v}_t^*, \mathbf{N}] \right) \mathbf{N} \mathbb{S} \\ &= \text{reg} \int \mathbb{S} \exp \left(-(\mathbf{v}\mathbf{v}_t^* + \mathbf{v}_t^*\mathbf{v}) - (\mathbf{V} + \mathbf{V}_t^*) \right) \mathbf{N} \mathbb{S} \\ &= \text{reg} \int \mathbb{S} \exp \left(-(\mathbf{v}\mathbf{v}_t^* + \mathbf{v}_t^*\mathbf{v}) \right) \exp \left(-(\mathbf{V} + \mathbf{V}_t^*) \right) \mathbf{N} \mathbb{S} \\ &= \text{reg} \int \mathbb{S} \exp \left(-(\mathbf{v}\mathbf{v}_t^* + \mathbf{v}_t^*\mathbf{v}) \right) \frac{1}{(2p-2)!} (\mathbf{V} + \mathbf{V}_t^*)^{2(p-1)} \mathbf{N} \mathbb{S} . \end{aligned}$$

Kommentar zu den Notationen: Wir benutzen dabei das Differential $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n$ und den *deformierten* adjungierten Operator $\mathbf{v}_t^* = t_1 \mathbf{v}_1^* + \cdots + t_n \mathbf{v}_n^*$. Der Deformationsparameter ist $\mathbf{t} := (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$. Analog für \mathbf{V} und \mathbf{V}^* .

2. Explizite Berechnungen

2.1. Umverteilung der Deformations–Parameter. Die Superspur isoliert Monome vom Grad Null in jeder der n Richtungen. Insbesondere können wir die Deformations–Parameter umverteilen:

Seien $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ neue formale, untereinander superkommutierende Variablen vom Grad Eins ($\epsilon_i \epsilon_j = -\epsilon_j \epsilon_i$ für $i \neq j$, $\epsilon_i^2 = 0$), welche mit den Operatoren \mathbf{v} und \mathbf{v}^* formal superkommutieren. Wir benutzen ϵ_1 als “Ersatz” für Differentialformen der Form $\frac{dt_i}{t_i}$.

Wir substituieren auch

$$\tau_i := \sqrt{t_i} \in \mathbb{R}_{>0}$$

und führen weiter für $i = 1, \dots, n$ und für $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathbb{R}_{>0}$ die Operatoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i &:= \tau_i \mathbf{v}_i & \mathbf{w} &:= \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_n \\ \mathbf{w}_i^* &:= \tau_i \mathbf{v}_i^* & \mathbf{w}^* &:= \mathbf{w}_1^* + \cdots + \mathbf{w}_n^* \\ \mathbf{M}_i &:= N_i \epsilon_i , & \mathbf{M} &:= \mathbf{M}_1 + \cdots + \mathbf{M}_n \\ \mathbf{W}_i &:= \mathbf{w}_i \epsilon_i = \tau_i \mathbf{v}_i \epsilon_i , & \mathbf{W} &:= \mathbf{W}_1 + \cdots + \mathbf{W}_n \\ \mathbf{W}_i^* &:= \mathbf{w}_i^* \epsilon_i = \tau_i \mathbf{v}_i^* \epsilon_i , & \mathbf{W}^* &:= \mathbf{W}_1^* + \cdots + \mathbf{W}_n^* \end{aligned}$$

Sei \mathbf{pr} die Projektion von rechts auf den Anteil in $\epsilon_1 \epsilon_2 \cdots \epsilon_n$. Für eine Form ω in $A(\text{End}(E))$ gilt also $\mathbf{pr}(\omega \cdot \epsilon_1 \epsilon_2 \cdots \epsilon_n) := \omega$. (Man vergleiche mit $\mathbf{pr}(\epsilon_1 \epsilon_2 \cdots \epsilon_n \cdot \omega) = (-1)^{n|\omega|} \omega$.) Durch die multiplikative Substitution $t_i = \tau_i^2$ ändert sich $\frac{dt_i}{t_i}$ in $2 \frac{d\tau_i}{\tau_i}$, und bis auf Multiplikation mit einer rationalen Zahl ungleich Null (— in Notation

ersetzen wir die Gleichheit “=” durch die Äquivalenzrelation \sim oder explizit $\sim_{\mathbb{Q}^\times} \text{---}$) folgt:

$$\begin{aligned} \text{ch}_{\mathbf{D}}(\xi, p) &\sim \text{reg} \int \mathbb{S} \exp(-(\mathbf{v}\mathbf{v}^* + \mathbf{v}^*\mathbf{v})) (\mathbf{V} + \mathbf{V}^*)^{2(p-1)} \mathbf{N} \mathbb{S} \\ &\sim \text{reg} \int \mathbb{S} \exp(-(\mathbf{w}\mathbf{w}^* + \mathbf{w}^*\mathbf{w})) (\mathbf{W} + \mathbf{W}^*)^{2(p-1)} \mathbf{M} \mathbb{S} \frac{d\tau_1}{\tau_1} \wedge \dots \wedge \frac{d\tau_n}{\tau_n} . \end{aligned}$$

Wir bezeichnen $\frac{d\tau_1}{\tau_1} \wedge \dots \wedge \frac{d\tau_n}{\tau_n}$ auch durch $d\log(\tau)$.

2.2. Die Regularisierung des Integrals. Die Operatoren \mathbf{W}_i und \mathbf{W}_i^* verschwinden in $\tau_i = 0$. Seien

$$\mathbf{w}(i) := \sum_{j \neq i} \mathbf{w}_j , \quad \mathbf{w}(i)^* := \sum_{j \neq i} \mathbf{w}_j^* .$$

Wir führen folgende Notationen ein:

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{w}) &:= \mathbf{w}^*\mathbf{w} + \mathbf{w}\mathbf{w}^* , \\ \Delta^i(\mathbf{w}) &:= \mathbf{w}(i)^*\mathbf{w}(i) + \mathbf{w}(i)\mathbf{w}(i)^* . \end{aligned}$$

Die explizite Regularisierung des Integrals ist:

$$\begin{aligned} \text{ch}_{\mathbf{D}}(\xi, p) &\sim \int_{(0, \infty)^n} \left\{ - \sum_i \mathbb{S} \exp(-\Delta(\mathbf{w})) (\mathbf{W} + \mathbf{W}^*)^{2(p-1)} \mathbf{M} \mathbb{S} \right. \\ &\quad \left. \mathbb{S} \exp(-\Delta^i(\mathbf{w})) (\mathbf{W} + \mathbf{W}^*)^{2(p-1)} \mathbf{M}_i \mathbb{S} \right\} d\log(\tau) \\ &\sim \sum_i \int_{(0, \infty)^n} \mathbb{S} [\exp(-\Delta(\mathbf{w})) - \exp(-\Delta^i(\mathbf{w}))] (\mathbf{W} + \mathbf{W}^*)^{2(p-1)} \mathbf{M}_i \mathbb{S} d\log(\tau) . \end{aligned}$$

Dabei wurde für die Regularisierung der Faktor $\exp(-\tau_i^2)$ benutzt, welcher zu $\exp(-t_i)$ entspricht. Die Berechnung des letzten Ausdrucks folgt, wenn wir den Ausdruck verstehen:

$$\begin{aligned} (166) \quad &\int_{(0, \infty)^n} [\exp(-\Delta(\mathbf{w})) - \exp(-\Delta^i(\mathbf{w}))] \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \frac{1}{\tau_i} d\log(\tau) \\ &= \int_{(0, \infty)^n} [\exp(-\Delta(\mathbf{w})) - \exp(-\Delta^i(\mathbf{w}))] \frac{1}{\tau_i} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n . \end{aligned}$$

Dieses Integral nimmt als Werte Schnitte von Endomorphismen des komplexifizierten Bündels zu $E^{\bullet[n]}$.

Wir erläutern zuerst den Fall $n = 1$ und schildern kurz weiter zwei Methoden, letztes Integral partiell zu berechnen.

2.3. Der Fall $n = p = 1$. Sei \mathbf{v} das Differential des Komplexes, und sei \mathbf{v}^* der adjungierte Operator bzgl. der nicht deformierten Metrik h . Seien $\lambda^{(i)}_1, \dots, \lambda^{(i)}_{k_i}$ die (Schnitte von) streng positiven Eigenwerten des selbstadjungierten positiven Operators $\mathbf{v}\mathbf{v}^* + \mathbf{v}^*\mathbf{v}$, eingeschränkt auf E^i . Es ist:

$$\begin{aligned} \text{ch}_{\mathbf{D}}(\xi, 1) &\sim \text{reg} \int \mathbb{S} \exp(-t(\mathbf{v}\mathbf{v}^* + \mathbf{v}^*\mathbf{v})) N \mathbb{S} \frac{dt}{t} \\ &= \sum_i (-1)^i \text{reg} \int \text{Spur} (\exp(-t(\mathbf{v}\mathbf{v}^* + \mathbf{v}^*\mathbf{v})) \text{ eingeschränkt auf } E^i) \frac{dt}{t} \\ &= \sum_i (-1)^i \text{reg} \int \text{Spur} (\exp(-t \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k_i}))) \\ &= \sum_i (-1)^i \text{Spur} \text{diag} \left(\text{reg} \int \exp(-t\lambda^{(i)}_1) \frac{dt}{t}, \dots, \text{reg} \int \exp(-t\lambda^{(i)}_{k_i}) \right) \\ &= \sum_i (-1)^i \text{Spur} \text{diag} (-\ln \lambda^{(i)}_1 , \dots , -\ln \lambda^{(i)}_{k_i}) \\ &= - \sum_i (-1)^i \ln(\lambda^{(i)}_1 \dots \lambda^{(i)}_{k_i}) \\ &= - \sum_i (-1)^i \det((\mathbf{v}\mathbf{v}^* + \mathbf{v}^*\mathbf{v}) \text{ eingeschränkt auf } E^i) . \end{aligned}$$

Es entsteht die sogenannte Superdeterminante von $(\mathbf{v}\mathbf{v}^* + \mathbf{v}^*\mathbf{v})$.

2.4. Erste Methode: Der Differentialoperator $P(\tau, \partial)$.

DEFINITION 2.1. $P(\tau, \partial)$ ist der Differentialoperator

$$\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \cdots + \tau_n \frac{\partial}{\partial \tau_n} .$$

Wegen der Homogenität vom Grad 2 von $\Delta(w)$ (und von $\Delta^i(w)$ auch) bzgl. $\tau := (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ gilt für eine beliebige reell-analytische Funktion $f = f(x)$ auf $(0, \infty)$:

$$\begin{aligned} P(\tau, \partial) f(\Delta(w)) &= f'(\Delta(w)) \cdot P(\tau, \partial)(\Delta(w)) = f'(\Delta(w)) \cdot 2\Delta(w) , \\ P(\tau, \partial) \left[f(\Delta(w)) \cdot \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \frac{1}{\tau_i} \right] &= [P(\tau, \partial) f(\Delta(w))] \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \frac{1}{\tau_i} + f(\Delta(w)) \left[P(\tau, \partial) \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \frac{1}{\tau_i} \right] \\ &= 2 [f'(\Delta(w)) \cdot \Delta(w) + q f(\Delta(w))] \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \frac{1}{\tau_i} . \end{aligned}$$

Sei g eine stetige Funktion auf $[0, \infty)$. Wir definieren im Falle $q \geq 1$ (eventuell für komplexe q mit Realteil > 1) die stetige Funktion $I_q g$ auf $[0, \infty)$ durch

$$I_q g(x) := \frac{1}{x^q} \int_0^x y^q g(y) \frac{dy}{y} .$$

Diese Funktion erfüllt die Differentialgleichung: $(I_q g)'(x) \cdot x + q(I_q g)(x) = g(x)$, da gilt $[(I_q g)'(x) \cdot x + q(I_q g)(x)] x^{q-1} = [x^q (I_q g)(x)]'$. Wir können also für die spezielle Funktion f auf $[0, \infty)$, $f(x) := e^{-x}$, ausgehend von (166) schreiben:

$$\begin{aligned} & \int_{(0, \infty)^n} [f(\Delta(w)) - f(\Delta^i(w))] \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \frac{1}{\tau_i} d\log(\tau) \\ &= \int_{(0, \infty)^n} P(\tau, \partial) \left\{ [(I_q f)(\Delta(w)) - (I_q f)(\Delta^i(w))] \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \frac{1}{\tau_i} \right\} d\log(\tau) \\ &= \sum_j \left\{ \int_{(0, \infty)^{n-1}} [(I_q f)(\Delta(w)) - (I_q f)(\Delta^i(w))] \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \frac{1}{\tau_i} d\log(\tau^{(i)}) \right\} \Bigg|_{\tau_j=0}^{\tau_j=\infty} . \end{aligned}$$

Im letzten Ausdruck steht $\tau^{(i)}$ für $(\tau_1, \dots, \tilde{\tau}_i, \dots, \tau_n)$, wobei die i -te Komponente entfällt.

2.4.1. *Iterierte Anwendung des Operators I_q .* Der letzte Ausdruck läßt wünschen, daß eine erneute Anwendung des gleichen Tricks erfolgen soll. Es gilt:

$$\begin{aligned} \underbrace{(I_q I_q \dots I_q g)}_{k \text{ mal}}(x) &= \frac{1}{x^q} \int_0^x \frac{dx_1}{x_1} \int_0^{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \dots \int_0^{x_{k-2}} \frac{dx_{k-1}}{x_{k-1}} \int_0^{x_{k-1}} x_k^q g(x_k) \frac{dx_k}{x_k} \\ &= \frac{1}{x^q} \int_{0 < x_k < \dots < x_1 < x} \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_{k-1}}{x_{k-1}} x_k^q g(x_k) \frac{dx_k}{x_k} \\ &= \frac{1}{x^q} \int_{0 < x_k < x} x_k^q g(x_k) \frac{dx_k}{x_k} \int_{x_k < \dots < x_1 < x} \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_{k-1}}{x_{k-1}} \\ &= -\frac{1}{x^q} \int_{0 < x_k < x} x_k^q g(x_k) \ln^{k-1} \left(\frac{x_k}{x} \right) \frac{dx_k}{x_k} . \end{aligned}$$

Es gibt jedoch Schwierigkeiten, die iterierte Anwendung des Operators I_q ins Spiel zu bringen, wie der folgende Unterabschnitt es verdeutlicht.

2.4.2. *Anwendung der ersten Methode für ein ähnliches Integral.* Wir ersetzen den Ausdruck $\Delta(w)$ durch eine diagonale Bilinear-Form in drei Variablen, um die Anwendung der Methode zu veranschaulichen: Es gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{(0, \infty)^3} [e^{-(ax^2+by^2+cz^2)} - e^{-(ax^2+by^2+z^2)}] dx dy \frac{dz}{z} \\ &= \left(\int_0^\infty e^{-ax^2} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-by^2} dy \right) \left(\int_0^\infty [e^{-cz^2} - e^{-z^2}] \frac{dz}{z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} (-2 \ln c) = -\frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \ln c . \end{aligned}$$

Sei erneut $f(x) := e^{-x}$. Alternativ können wir folgenden Weg wählen:

$$\begin{aligned}
 & \int_{(0,\infty)^3} [e^{-(ax^2+by^2+cz^2)} - e^{-(ax^2+by^2+z^2)}] dx dy \frac{dz}{z} \\
 &= \int_{(0,\infty)^3} [f(ax^2+by^2+cz^2) - f(ax^2+by^2+z^2)] xy \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \frac{dz}{z} \\
 &= \int_{(0,\infty)^3} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) [(I_1 f)(ax^2+by^2+cz^2) - (I_1 f)(ax^2+by^2+z^2)] xy \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \frac{dz}{z} \\
 (167) \quad &= \int_{(0,\infty)^2} [(I_1 f)(ax^2+by^2+cz^2) - (I_1 f)(ax^2+by^2+z^2)] xy \frac{dy}{y} \frac{dz}{z} \Bigg|_{x=0}^{\infty} \\
 (168) \quad &- \int_{(0,\infty)^2} [(I_1 f)(ax^2+by^2+cz^2) - (I_1 f)(ax^2+by^2+z^2)] xy \frac{dx}{x} \frac{dz}{z} \Bigg|_{y=0}^{\infty} \\
 (169) \quad &+ \int_{(0,\infty)^2} [(I_1 f)(ax^2+by^2+cz^2) - (I_1 f)(ax^2+by^2+z^2)] xy \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \Bigg|_{z=0}^{\infty}.
 \end{aligned}$$

Man kann zeigen, daß die ersten zwei Integrale, welche dann an den Stellen $x = 0, \infty$ und $y = 0, \infty$ ausgewertet werden, verschwinden. Wir betrachten das dritte Integral: Da $I_1 f(x) = (1 - e^{-x})/x$ ist, untersuchen wir separat die Integrale:

$$(170) \quad J_1 := \int_{(0,\infty)^2} \left[\frac{1}{ax^2+by^2+cz^2} - \frac{1}{ax^2+by^2+z^2} \right] dx dy \quad \text{und}$$

$$(171) \quad J_2 := \int_{(0,\infty)^2} \left[\frac{e^{-(ax^2+by^2+cz^2)}}{ax^2+by^2+cz^2} - \frac{e^{-(ax^2+by^2+z^2)}}{ax^2+by^2+z^2} \right] dx dy.$$

Das erste Integral kann explizit berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_0^\infty dy \int_0^\infty \left[\frac{1}{ax^2+by^2+cz^2} - \frac{1}{ax^2+by^2+z^2} \right] dx \\
 &= \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \int_0^\infty dy \left[\frac{1}{\sqrt{by^2+cz^2}} - \frac{1}{\sqrt{by^2+z^2}} \right] \\
 &= \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{b}} \left[\ln(y\sqrt{b} + \sqrt{by^2+cz^2}) - \ln(y\sqrt{b} + \sqrt{by^2+z^2}) \right] \Bigg|_{z=0}^{\infty} \\
 &= \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{y\sqrt{b} + \sqrt{by^2+cz^2}}{y\sqrt{b} + \sqrt{by^2+z^2}} \Bigg|_{z=0}^{\infty}.
 \end{aligned}$$

Die Auswertung für $z = \infty$ verschwindet, und an der Stelle $y = 0$ ist der Grenzwert $-\frac{\pi}{4\sqrt{ab}} \ln c$. Diese ist eine Konstante in z , liefert also für die Differenz für $z = \infty$ und $z = 0$ keinen Betrag. Wir betrachten nun das zweite

Integral:

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \int_{(0,\infty)^2} \left[\frac{e^{-(ax^2+by^2+cz^2)}}{ax^2+by^2+cz^2} - \frac{e^{-(ax^2+by^2+z^2)}}{ax^2+by^2+z^2} \right] dx dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{(0,\infty)^2} \left[\frac{e^{-(x^2+y^2+cz^2)}}{x^2+y^2+cz^2} - \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{x^2+y^2+z^2} \right] dx dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{r \in (0,\infty)} \int_{\theta \in (0, \frac{\pi}{2})} \left[\frac{e^{-(r^2+cz^2)}}{r^2+cz^2} - \frac{e^{-(r^2+z^2)}}{r^2+z^2} \right] r dr d\theta \\
 &= \frac{\pi}{4\sqrt{ab}} \int_{\rho \in (0,\infty)} \left[\frac{e^{-(\rho+cz^2)}}{\rho+cz^2} - \frac{e^{-(\rho+z^2)}}{\rho+z^2} \right] d\rho \\
 &= \frac{\pi}{4\sqrt{ab}} \left[\int_{z^2}^{\infty} e^{-c\rho} \frac{d\rho}{\rho} - \int_{z^2}^{\infty} e^{-\rho} \frac{d\rho}{\rho} \right] \\
 &= \frac{\pi}{4\sqrt{ab}} \int_{z^2}^{\infty} (e^{-c\rho} - e^{-\rho}) \frac{d\rho}{\rho} .
 \end{aligned}$$

Der Grenzwert in J_2 für $z \rightarrow \infty$ ist Null, und für $z \rightarrow 0$ erhalten wir $-\frac{\pi}{4\sqrt{ab}} \ln c$.

Diese Berechnungen illustrieren das Verhalten der Integrale (167), (168), (169) auch im allgemeinen Fall.

2.5. Zweite Methode. Für $\tau \in (0, \infty)$ substituieren wir $\tau = \rho \cdot \sigma$, wobei $\rho \in (0, \infty)$ und $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in S_+^{n-1}$. Dabei ist $S_+^{n-1} = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in (0, \infty)^{n-1} : \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 = 1\}$. Das Maß $d\tau$ auf $(0, \infty)^n$ entspricht dem Maß $\rho^{n-1} d\rho d\sigma$. Es gilt für eine komplexe Zahl s mit positivem Realanteil für die ζ -Regularisierung:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{(2s)} \int_{(0,\infty)^n} \exp(-\Delta(w)(\tau)) \tau_i^{2s} \frac{1}{\tau_i} d\tau \\
 &= \frac{1}{(2s)} \int_{\sigma \in S_+^{n-1}} \int_{\rho \in (0,\infty)} \exp(-\rho^2 \Delta(w)(\sigma)) \rho^{2s} \sigma_i^{2s} \frac{1}{\rho \sigma_i} \rho^{n-1} d\rho d\sigma \\
 &= \frac{1}{(2s)} \int_{\sigma \in S_+^{n-1}} \sigma_i^{2s} \frac{d\sigma}{\sigma_i} \int_0^\infty \exp(-\rho^2 \Delta(w)(\sigma)) \rho^{2q+2s} \frac{d\rho}{\rho} \\
 &= \frac{1}{2, (s)} \int_{\sigma \in S_+^{n-1}} \sigma_i^{2s} \frac{d\sigma}{\sigma_i} (\Delta(w)(\sigma))^{-(q+s)}, (q+s) \\
 &= \frac{1}{2} s(s+1) \dots (s+q-1) \int_{\sigma \in S_+^{n-1}} (\Delta(w)(\sigma))^{-(q+s)} \sigma_i^{2s} \frac{d\sigma}{\sigma_i} .
 \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [ABKS] Abramovich, ; Brunol, ; Kramer, ; Soulé, Christoph: Introduction to the ARAKELOV geometry.
- [Ar1] Arakelov, S.: An intersection theory for divisors on an arithmetic surface, *Izv. Akad. Nauk.*, 38(1974), S. 1179–1192.
- [Ar2] Arakelov, S.: Theory of intersections on an arithmetic surface, *Proceedings of the International Congress, Vancouver, 1974*, S. 405–408. An intersection theory for divisors on an arithmetic surface, *Izv. Akad. Nauk.*, 38(1974), S. 1179–1192.
- [Be] Beilinson, A.A.: Higher regulators and values of L-functions, *J. Soviet Math.* 30(1985), S. 2036–2070, Übersetzung von *Sovr. Probl. Math.* 24, Mosc. VINITI (1984), S. 181–238.
- [Be2] Beilinson, A.A.: Notes on absolute Hodge Kohomologie, Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, *Proceedings of a summer research conference held in Boulder, Colorado, 35–68*, *Contemp. Math.* 55, AMS, Providence, RI
- [BBD] Beilinson, A.A.; Bernstein, J.; Deligne, P.: Analyse et topologie sur les espaces singulieres I, 10 juillet 1981, in *Astérisque* 100, Société mathématique de France, 1982, 171 S.
- [BMS] Beilinson, A.; MacPherson, R.; Schechtman, V.: Notes on motivic cohomology, *Duke Mathematical Journal*, Vol. 54, No. 2, 1987, S. 679–710.
- [BH1] Brown, Ronald; Higgins, Philip J.: On the algebra of cubes, *Journal of Pure and Applied Algebra* 21(1981), S. 233–260.
- [BH2] Brown, Ronald; Higgins, Philip J.: On colimit theorems for relative homotopy groups, *Journal of Pure and Applied Algebra* 22(1981), S. 11–41.
- [BGV] Berline, N.; Getzler, E.; Vergne, M.: Heat kernels and Dirac operators, *Grundlehren der Math. Wiss.* 298, Springer, 1992.
- [Bou] Bourbaki, Nicolas: *Algèbre*, Chapitre 10, *Algèbre homologique*, Masson, 1980.
- [Bu] Burgos, José Ignacio: *Anillos de Chow arithmeticos*, Doktorarbeit, Barcelona, Mai 1994.
- [BW] Burgos, José Ignacio; Wang, Steve: Higher Bott-Chern forms and Beilinson’s regulator, *Invent. math.* 132(1998), S. 261–305.
- [CE] Cartan, Henri; Eilenberg, Samuel: *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.
- [Cu] Curtis, Edward B.: *Simplicial Homotopy Theory*, *Advances in Mathematics* 6 (1971), S. 107–209.
- [Ch] Chen, Kuo-Tsai: Iterated path integrals, *Bull. of the AMS*, vol. 83, nr. 5 (1977), S. 831–879.
- [Do] Dold, Albrecht: *Lectures on algebraic topology*, Springer-Verlag, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* 200.
- [EMacL] Eilenberg, Samuel; MacLane, Saunders: Acyclic Models, *American Journal of Mathematics* 75 (1953), S.189–199.
- [HY] Hain, Richard M.; Yang, Jun: Real Grassmann polylogarithms and Chern classes, *Math. Ann.* 304 (1996), S.157–201.
- [Fa] Faltings, Gerd: Lectures on the arithmetic Riemann–Roch theorem, *Ann. Math. Studies* 127, Princeton Univ. Press, 1992.
- [Fa2] Faltings, Gerd: Calculus on arithmetic surfaces, *Ann. Math.*, II. Ser. 119 (1984), 387–424.
- [GM] Gelfand, S.I.; Manin, Yu. I.: *Homological Algebra*, in *Algebra V*, Kostrikin, A.I.; Shafarevich, I.R. (Eds.), *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, Vol. 38, 222 S., Springer, 1994. (Titel der russischen Ausgabe: *Itogi nauki i tekhniki, Sovremennyye problemy matematiki, Fundamental’nye napravleniya*, Vol. 38, *Algebra* 5, VINITI, Moscow, 1989.)
- [Gil] Gillet, Henri: Comparing algebraic and topological K-theory, in *LNMA* 1496 S. 55–99, Springer 1992.
- [GG] Gillet, Henri; Grayson, Dan: The loop space of the Q-construction, *Illinois Journal of Mathematics*, 31(1987), S.574–597.
- [Gr] Grayson, Dan: Weight filtrations in algebraic K-theory, in *Motives [JKS]*, Part I, S. 207–238.
- [Hu] Hulsbergen, Wilfried W.J.: Conjectures in arithmetic algebraic geometry: a survey, *Aspects of Mathematics: E*; Vol. 18, Vieweg, 1992.
- [Iv] Iversen, Birger: *Cohomology of sheaves*, Universitext, 464 S., Springer 1986.
- [Ka] Kassel, Christian: *Quantum groups*, *Graduate Texts in Mathematics* 155, Springer 1995, 531 S.
- [La] Lang, Serge: *Introduction to Arakelov theory*, 187 S., Springer 1988.
- [Ma] Manin, Yuri I.: Gauge field theory and complex geometry, *Grundlehren der Math. Wiss.* 289, Springer 1988; russische Originalausgabe: *Kalibrovochnye polya i kompleksnaya geometriya*, Nauka, Moskwa, 1984.
- [May] May, J. Peter: *Simplicial objects in algebraic topology*, *van Nostrand Mathematical Studies*, No. 11, 1967, 161 S.
- [JKS] Jannsen, Uwe; Kleiman, Steven; Serre, Jean-Pierre (Editors): *Motives*, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Vol. 55, Part I+II, *Proceedings of the summer research conference on motives*, University of Washington, Seattle, 20.07–02.08.1991, AMS 1994, 747+676 S.
- [Ne] Nekovář, Ian: Beilinson’s Conjectures, in *Motives [JKS]*, Part I, S. 537–570.
- [Ri] Rivano, Neantro Saavedra: *Catégories Tannakiennes*, *Lecture Notes in Mathematics* 265, Springer, 1972, 418 S.
- [RSS] Rapoport, M.; Schappacher, N.; Schneider, P (Editors): Beilinson’s conjectures on special values of L-functions, *Perspectives in Mathematics*, Vol. 4, 1988, 373 S.
- [Sch] Schneider, Peter: Introduction to Beilinson’s Conjectures, in *Beilinsons Conjectures on special values of L-functions [RSS]*, S. 1–26.
- [Se] Serre, Jean-Pierre: Homologie singulière des espaces fibrés, Applications, *Annals of Mathematics*, No. 3, Vol. 54, November 1951.
- [Si] Simpson, Carlos T.: Higgs bundles and local systems, *Publ. Math.*, No. 75(1992), S. 5–95.
- [Sr] Srinivas, V.: *Algebraic K-Theory*, *Progress in Mathematics* 90, Birkhäuser Boston, 1991.
- [To] Tonks, A.P: Cubical groups which are Kan, *Journal of Pure and Applied Algebra* 81 (1992), S. 83–87.

- [Ts] Tsuji, Takeshi : Syntomic complexes and p -adic vanishing cycles, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) 472(1996), S. 69-138.
- [TT] Thomason, R.W., Trobough, T.: Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories, in The Grothendieck Festschrift III, S. 247-435, Progr. in Math. 88, Birkhäuser 1990.
- [Wa] Wang, Xuesung: Higher Order Characteristic classes in arithmetic geometry, Ph. D. thesis, Harvard Univ., Cambridge, May 1992.
- [W] Weissauer, Rainer: Arithmetische Schnitt-Theorie, 147 S., nicht publiziert.